

Chương II. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình tích

Để giải phương trình tích $(ax + b)(cx + d) = 0$, ta giải phương trình $ax + b = 0$ và $cx + d = 0$. Sau đó lấy tất cả các nghiệm của chúng.

Ta có thể viết: $(ax + b)(cx + d) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0$ hoặc $cx + d = 0$.

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

- Điều kiện xác định của một phương trình:

Đối với phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta thường đặt điều kiện cho ẩn tất cả các mẫu thức trong phương trình đều khác 0 và gọi đó là điều kiện xác định (viết tắt là ĐKXĐ) của phương trình.

- Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu:

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu ta thường thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình vừa tìm được.

Bước 4 (Kết luận): Trong các giá trị tìm được của ẩn ở Bước 3, giá trị nào thoả mãn điều kiện xác định chính là nghiệm của phương trình đã cho.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Phương trình tích

Bài toán 1. Giải phương trình:

a) $3x(x-1) - 2(x-1) = 0$

b) $x^2 - 4 - (x+5)(2-x) = 0$

c) $2x^3 + 4x^2 = x^2 + 2x$

Hướng dẫn: Biến đổi tương đương đưa về dạng $A(x) \cdot B(x) = 0$.

Lời giải

a) Ta có

$$(1) \Leftrightarrow 3x(x-1) - 2(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(3x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ hoặc } 3x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x=\frac{2}{3}$$

Phương trình (1) có tập nghiệm: $S = \left\{1; \frac{2}{3}\right\}$.

b) Ta có

$$(2) \Leftrightarrow (x-2)(x+2) + (x+5)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2+x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2x+7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ hoặc } 2x+7=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ hoặc } x=-\frac{7}{2}$$

Phương trình (2) có tập nghiệm: $S = \left\{2; -\frac{7}{2}\right\}$.

c) Ta có

$$(3) \Leftrightarrow 2x^2(x+2) - (x^2+2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2(x+2) - x(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(2x^2-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+2)(2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x+2=0 \text{ hoặc } 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x=-2 \text{ hoặc } x=\frac{1}{2}$$

Phương trình (3) có tập nghiệm: $S = \left\{0; -2; \frac{1}{2}\right\}$.

Bài toán 2. Giải phương trình:

$$\text{a) } x^3 - 1 = x^2 - x \quad (1)$$

$$\text{b) } (2x-5)^2 - x^2 - 4x - 4 = 0 \quad (2)$$

$$\text{c) } (x-2)(x^2+3x-2) - x^3 + 8 = 0 \quad (3)$$

d) $(x-3)^2 - 9 = 0$ (4)

Lời giải

a) Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) - x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ hoặc } x^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ (} x^2+1=0 \text{ vô nghiệm vì } x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 > 0 \text{)}$$

Phương trình (1) có tập nghiệm: $S = \{1\}$.

b) Ta có

$$(2) \Leftrightarrow (2x-5)^2 - (x+2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-5+x+2)(2x-5-x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-3)(x-7) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x-3=0 \text{ hoặc } x-7=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x=7$$

Phương trình (2) có tập nghiệm: $S = \{1; 7\}$.

c) Ta có

$$(3) \Leftrightarrow (x-2)(x^2+3x-2) - (x-2)(x^2+2x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+3x-2-x^2-2x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ hoặc } x-6=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ hoặc } x=6$$

Phương trình (3) có tập nghiệm: $S = \{2; 6\}$.

d) Ta có

$$(4) \Leftrightarrow (x-3)^2 - 3^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3+3)(x-3-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x-6=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x=6$$

Phương trình (4) có tập nghiệm: $S = \{0; 6\}$.

Bài toán 3. Giải phương trình:

a) $x^2 + x - 12 = 0$ (1)

b) $x^2 + 3x + 2 = 0$ (2)

c) $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 = 0$ (3)

d) $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$ (4)

Hướng dẫn: Phân tích đa thức ở vế trái thành nhân tử ta đưa về phương trình tích.

Lời giải

a) Ta có (1) $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 4x - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-3) + 4(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-3=0 \text{ hoặc } x+4=0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ hoặc } x=-4.$$

Phương trình (1) có tập nghiệm: $S = \{3; -4\}$.

b) Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2 + x + 2x + 2 = 0$

$$(2) \Leftrightarrow x(x+1) + 2(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \text{ hoặc } x+2=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ hoặc } x=-2$$

Phương trình (2) có tập nghiệm: $S = \{-1; -2\}$.

c) Ta có: (3) $\Leftrightarrow 2x^3 - 8x + 3x^2 - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x(x^2 - 4) + 3(x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4)(2x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(2x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ hoặc } x+2=0 \text{ hoặc } 2x+3=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ hoặc } x=-2 \text{ hoặc } x=-\frac{3}{2}$$

Phương trình (3) có tập nghiệm: $S = \left\{2; -2; -\frac{3}{2}\right\}$.

d) Ta có: $(4) \Leftrightarrow (x^3 - 4x^2) - (x - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 4) - (x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 0 \text{ hoặc } x - 1 = 0 \text{ hoặc } x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ hoặc } x = 1 \text{ hoặc } x = -1$$

Phương trình (4) có tập nghiệm: $S = \{4; 1; -1\}$.

Bài toán 4. Giải phương trình:

a) $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ (1)

b) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = 0$ (2)

Hướng dẫn: Phân tích về trái thành nhân tử.

Lời giải

a) Ta có (1) $\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x + x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 2) + x(x - 2) + (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ hoặc } x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (vì } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ nên phương trình } x^2 + x + 1 = 0 \text{ vô nghiệm)}$$

Phương trình (1) có tập nghiệm: $S = \{2\}$.

b) Ta có

$$(2) \Leftrightarrow x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1$$

Phương trình (2) có tập nghiệm: $S = \{0; 1\}$

Bài toán 5. Giải phương trình:

a) $x^4 + 2x^3 - 4x - 4 = 0$ (1)

b) $x^4 + 6x^2 + 8 = 0$ (2)

c) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$ (3)

Lời giải

a) Ta có (1) $\Leftrightarrow (x^4 - 4) + (2x^3 - 4x) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 + 2) + 2x(x^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{2} = 0 \text{ hoặc } x + \sqrt{2} = 0 \text{ hoặc } x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ hoặc } x = -\sqrt{2}$$

(Vì $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1 > 0$ nên phương trình $x^2 + 2x + 2 = 0$ vô nghiệm)

Phương trình (1) có tập nghiệm: $S = \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$.

b) Ta có

$$(2) \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 4x^2 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 2) + 4(x^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)(x^2 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 = 0 \text{ hoặc } x^2 + 4 = 0$$

(hai phương trình cuối cùng đều vô nghiệm vì $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2 > 0, x^2 + 4 > 0$)

Phương trình (2) có tập nghiệm: $S = \emptyset$.

c) Ta có

$$(3) \Leftrightarrow x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x + 1) + 5x(x + 1) + 6(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)[(x^2 + 3x) + (2x + 6)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 3)(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ hoặc } x + 3 = 0 \text{ hoặc } x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = -3 \text{ hoặc } x = -2$$

Phương trình (3) có tập nghiệm: $S = \{-1; -3; -2\}$.

Bài toán 6. Giải phương trình:

a) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x + 3) - 2 = 0$ (1)

$$b) (2x^2 + 3x - 1)^2 - 5(2x^2 + 3x + 3) + 24 = 0 \quad (2)$$

$$c) (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 = 0 \quad (3)$$

Hướng dẫn:

a) Nhận xét về các biểu thức: $x^2 + 2x + 2$ và $x^2 + 2x + 3$

Ta đặt: $t = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = t + 1$

Ta gọi là phương pháp đặt ẩn phụ.

Lời giải

a) Đặt: $t = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = t + 1$

Ta có phương trình: $t(t+1) - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 1 + t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t+1) + t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -2$$

+ Với $t = 1$, ta có: $x^2 + 2x + 2 = 1$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

+ Với $t = -2$, ta có: $x^2 + 2x + 2 = -2$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = 0 \text{ vô nghiệm vì } x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 > 0 \text{ với mọi } x$$

Phương trình đã cho có tập nghiệm: $S = \{-1\}$

b) Đặt: $t = 2x^2 + 3x - 1 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 3 = t + 4$

Ta có phương trình: $t^2 - 5(t+4) + 24 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t - t + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t(t-4) - (t-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-4)(t-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t - 4 = 0 \text{ hoặc } t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 4 \text{ hoặc } t = 1$$

+ Nếu $t = 4$, ta có: $2x^2 + 3x - 1 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x(x-1) + 5(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ hoặc } 2x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -\frac{5}{2}$$

+ Nếu $t = 1$, ta có: $2x^2 + 3x - 1 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2 = 0 \text{ hoặc } 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = \frac{1}{2}$$

Phương trình (2) đã cho có tập nghiệm: $S = \left\{-2; \frac{1}{2}\right\}$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có: } (3) &\Leftrightarrow [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] - 24 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 24 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 5x + 4 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = t + 2$$

$$\text{Ta có phương trình: } t(t+2) - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)^2 - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1-5)(t+1+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-4)(t+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 4 \text{ hoặc } t = -6$$

$$+ \text{ Nếu } t = 4, \text{ ta có: } x^2 + 5x + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -5$$

$$+ \text{ Nếu } t = -6, \text{ ta có: } x^2 + 5x + 4 = -6 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} = 0$$

Phương trình này vô nghiệm vì vế trái luôn dương với mọi x.

Phương trình (3) đã cho có tập nghiệm: $S = \{0; -5\}$

Bạn hãy giải bài toán sau:

$$\text{Giải phương trình: } (x+1)(x+2)(x+4)(x+5) - 40 = 0$$

$$(\text{Gợi ý: Ta có: } (x+1)(x+5) = x^2 + 6x + 5$$

$$(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 6x + 5$$

II. Phương trình có tham số

Bài toán 7. Cho phương trình: $x^3 + x^2 + mx - 4 = 0$

a) Tìm m biết phương trình có một nghiệm là $x = -2$.

b) Giải phương trình với m vừa tìm được ở câu a).

Lời giải

a) Vì $x = -2$ là nghiệm của phương trình đã cho nên thay $x = -2$ vào phương trình, ta được

$$(-2)^3 + (-2)^2 + m(-2) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -8 + 4 - 2m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -4$$

b) Với $m = -4$, ta có phương trình: $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x+1) - 4(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 0 \text{ hoặc } x-2 = 0 \text{ hoặc } x+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 2 \text{ hoặc } x = -2$$

Phương trình đã cho có tập nghiệm: $S = \{-1; 2; -2\}$

Bài toán 8. Cho phương trình: $4x^2 + 4mx + m^2 - 25 = 0$

- a) Tìm các giá trị của m biết phương trình có một nghiệm $x = -2$
 b) Giải phương trình với mỗi giá trị tìm được câu a).

Lời giải

a) Vì $x = -2$ là nghiệm của phương trình đã cho nên thay $x = -2$ vào phương trình ta được:

$$\begin{aligned} 4(-2)^2 + 4m(-2) + m^2 - 25 &= 0 \\ \Leftrightarrow 16 - 8m + m^2 - 25 &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2 - 8m - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2 - 9m + m - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow m(m-9) + (m-9) &= 0 \\ \Leftrightarrow (m-9)(m+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow m = 9 \text{ hoặc } m = -1 \end{aligned}$$

b)

+ Nếu $m = 9$, ta có phương trình:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 36x + 81 - 25 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x+9)^2 - 5^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x+9-5)(2x+9+5) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x+4)(2x+14) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = -7 \end{aligned}$$

Vậy với $m = 9$, phương trình có tập nghiệm: $S = \{-2; -7\}$

+ Nếu $m = -1$, ta có phương trình:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x + 1 - 25 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x-1)^2 - 5^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x-1+5)(2x-1-5) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x+4)(2x-6) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x+4=0 \text{ hoặc } 2x-6=0 \\ \Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = 3 \end{aligned}$$

Vậy với $m = -1$, phương trình có tập nghiệm: $S = \{-2; 3\}$

III. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU**Bài toán 9.** Giải phương trình

$$\begin{aligned} a) \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} &= \frac{4}{x^2-4} \quad (1) & b) \frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} &= 0 \quad (2) \\ c) \frac{1}{x-5} - \frac{3}{x^2-6x+5} &= \frac{5}{x-1} \quad (3) & d) \frac{x-1}{x} + \frac{1-2x}{x^2+x} &= \frac{1}{x+1} \quad (4) \end{aligned}$$

Hướng dẫn:

- Tìm ĐKXĐ
- Tìm MTC
- Quy đồng và khử mẫu

Lời giải

a) Ta có: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

$$\begin{aligned} \text{ĐKXĐ: } x^2 - 4 \neq 0 &\Leftrightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \\ \Leftrightarrow x-2 \neq 0 \text{ và } x+2 &\neq 0 \\ \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ và } x &\neq -2 \end{aligned}$$

MTC: $x^2 - 4$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{x^2-4} - \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \frac{4}{x^2-4}$

Khử mẫu ta được:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4 &= 4 \\ \Leftrightarrow 8x &= 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)} \end{aligned}$$

Tập nghiệm của (1): $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

Chú ý: $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ và $x \neq -2$ không được viết:

$$\Leftrightarrow x \neq 2 \text{ hoặc } x \neq -2$$

b) Ta có: $x^2 + 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) \neq 0$

$$\Leftrightarrow x-1 \neq 0 \text{ và } x+3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 1 \text{ và } x \neq -3$$

MTC: $(x-1)(x+3)$

Ta có (2) $\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)(x+3)} - \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+3)} + \frac{4}{(x-1)(x+3)} = 0$

Khử mẫu ta được: $x^2 + 3x + x + 3 - x^2 + x - 2x + 2 + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 3x = -9 \Leftrightarrow x = -3 \text{ (không thỏa mãn ĐKXĐ)}$$

Tập nghiệm của (2): $S = \{\emptyset\}$

c) Ta có $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$

ĐKXĐ: $(x-1)(x-5) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1; x \neq 5$

MTC: $(x-1)(x-5)$

Ta có (3) $\Leftrightarrow \frac{x-1}{(x-1)(x-5)} - \frac{3}{(x-1)(x-5)} = \frac{5(x-5)}{(x-1)(x-5)}$

Khử mẫu ta được: $x - 1 - 3 = 5(x-5)$

$$-4x = -21$$

$$x = \frac{21}{4} \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)}$$

Tập nghiệm của phương trình (3): $S = \left\{ \frac{21}{4} \right\}$

d) Ta có $x^2 + x = x(x+1)$

ĐKXĐ: $x(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0; x \neq -1$

MTC: $x(x+1)$

Ta có (4) $\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} + \frac{1-2x}{x(x+1)} = \frac{x}{x(x+1)}$

Khử mẫu ta được: $x^2 + x - x - 1 + 1 - 2x = x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 3$$

Vì $x \neq 0$ nên ta lấy nghiệm $x = 3$

Tập nghiệm của (4): $S = \{3\}$

Bài toán 10. Giải phương trình:

a) $\frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1} \quad (1)$

b) $\frac{2}{x-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{x}{x^2+x+1} \quad (2)$

$$c) \frac{-7x^2+4}{x^3+1} = \frac{5}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} \quad (3)$$

Lời giải

a) Ta có : $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

ĐKXĐ: $(x-1)(x^2 + x + 1) \neq 0$

$$x \neq -1 \text{ (vì } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } x \text{ thuộc } \mathbb{R})$$

MTC: $(x-1)(x^2 + x + 1)$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{2x^2-5}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{4(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

Khử mẫu ta được: $x^2 + x + 1 + 2x^2 - 5 = 4x - 4$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1$$

Đối chiếu với điều kiện $x \neq -1$, ta lấy nghiệm $x = 0$

Tập nghiệm của (1): $S = \{0\}$

b) Ta có: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

ĐKXĐ: $(x-1)(x^2 + x + 1) \neq 0$

$$x \neq -1 \text{ vì } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } x \text{ thuộc } \mathbb{R}$$

MTC: $(x-1)(x^2 + x + 1)$

Quy đồng khử mẫu, ta được:

$$2.(x^2 + x + 1) - 3x^2 = x(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 2 - 3x^2 = x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2).(2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ hoặc } 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)}$$

Tập nghiệm của (2): $S = \left\{2; -\frac{1}{2}\right\}$

c) Ta có: $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

ĐKXĐ: $x+1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq -1 \text{ (vì } x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } x \text{ thuộc } \mathbb{R})$$

MTC: $(x+1)(x^2 - x + 1)$

Quy đồng khử mẫu ta được

$$-7x^2 + 4 = 5.(x+1) - (x^2 - x + 1)$$

$$-7x^2 + 4 = 5x + 5 - x^2 + x - 1$$

$$-6x^2 - 6x = 0$$

$$-6x(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (không thỏa mãn ĐKXD) hoặc } x = -1 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

Tập nghiệm của (3): $S = \{0\}$

Bài toán 11. Giải phương trình

$$\text{a) } \frac{13}{(x-3)(2x+7)} + \frac{1}{2x+7} = \frac{6}{x^2-9} \quad (1)$$

$$\text{b) } \frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+8x+15} = \frac{1}{6} \quad (2)$$

$$\text{c) } \frac{2}{4-x^2} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{x-4}{x^2+2x} \quad (3)$$

Lời giải

a) Ta có: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

ĐKXD: $x+3 \neq 0; x-3 \neq 0$ và $2x+7 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq -3; x \neq 3 \text{ và } x \neq -\frac{7}{2}$$

MTC: $(x+3)(x-3)(2x+7)$

Quy đồng và khử mẫu, ta được:

$$13(x+3) + x^2 - 9 = 6(2x+7)$$

$$13x + 39 + x^2 - 9 = 12x + 42$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x+4)(x-3) = 0$$

$$x = -4 \text{ hoặc } x = 3$$

Đối chiếu với ĐKXD, ta lấy $x = -4$ làm nghiệm

Vậy tập nghiệm của (1) là $S = \{-4\}$.

b) Ta có: $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3); x^2 + 8x + 15 = (x+5)(x+3)$

ĐKXD: $x+1 \neq 0; x+3 \neq 0$ và $x+5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1; -3; -5$.

MTC: $(x+1)(x+3)(x+5)$

Quy đồng và khử mẫu ta được:

$$6(x+5) + (x+1) = (x+1)(x+3)(x+5)$$

$$x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = 0$$

$$x^3 - 1 + 9x^2 - 9 + 11x - 11 = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1 + 9x + 9 + 11) = 0$$

$$(x-1)(x^2 + 10x + 21) = 0$$

$$(x-1)(x+7)(x+3) = 0$$

$$x-1=0 \text{ hoặc } x+7=0 \text{ hoặc } x+3=0$$

$$x=1 \text{ hoặc } x=-7 \text{ hoặc } x=-3.$$

Đối chiếu ĐKXĐ, ta lấy: $x=1; x=-7$ làm nghiệm

Vậy tập nghiệm của (2) là $S = \{1; -7\}$

Cách giải khác: ĐKXĐ: (xem cách giải trên)

$$\text{Ta có (2)} \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$$

Quy đồng và khử mẫu ta được: $x^2 + 6x - 7 = 0$

$$x^2 - x + 7x - 7 = 0$$

$$x(x-1) + 7(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x+7) = 0$$

$$x=1 \text{ hoặc } x=-7$$

c) Ta có:

$$x^2 - 2x = x(x-2)$$

$$x^2 + 2x = x(x+2)$$

$$4 - x^2 = -(x-2)(x+2)$$

ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 2$ và $x \neq -2$

MTC: $x(x-2)(x+2)$

Quy đồng và khử mẫu, ta được: $-2x + x + 2 = (x-4)(x-2)$

$$-x + 2 = x^2 - 6x + 8$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x-2=0 \text{ hoặc } x-3=0$$

$$x=2 \text{ hoặc } x=3$$

Đối chiếu với ĐKXĐ, ta lấy $x=3$ làm nghiệm của (3)

Vậy tập nghiệm của (3) là: $S = \{3\}$.

Bài toán 12. Giải phương trình

$$\text{a) } \frac{1}{4x^2 - 12x + 9} - \frac{3}{9 - 4x^2} = \frac{4}{4x^2 + 12x + 9} \quad (1)$$

$$\text{b) } \frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} = \frac{1}{8} \quad (2)$$

Hướng dẫn: Phân tích các mẫu thức thành nhân tử, (ở phương trình (2) xem cách giải của bài toán 11).

Lời giải

a) Ta có:

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$$

$$9 - 4x^2 = -(4x^2 - 9) = -(2x + 3)(2x - 3)$$

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$$

ĐKXĐ: $2x + 3 \neq 0$ và $2x - 3 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq -\frac{3}{2} \text{ và } x \neq \frac{3}{2}$$

MTC: $(2x + 3)^2 (2x - 3)^2$

Quy đồng và khử mẫu ta được:

$$(2x + 3)^2 + 3(4x^2 - 9) = 4(2x - 3)^2$$

$$4x^2 + 12x + 9 + 12x^2 - 27 = 4(4x^2 - 12x + 9)$$

$$60x = 54$$

$$x = \frac{9}{10}$$

Đối chiếu với ĐKXĐ, ta lấy $x = \frac{9}{10}$

Vậy tập nghiệm của (1) là $S = \left\{ \frac{9}{10} \right\}$.

b) Ta có:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

$$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$$

$$x^2 + 11x + 30 = (x + 5)(x + 6)$$

ĐKXĐ: $x \neq -2; -3; -4; -5; -6$

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right) + \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+5} \right) + \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} \right) = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{8}$$

$$8(x+6) - 8(x+2) = (x+2)(x+6)$$

$$x^2 + 8x - 20 = 0$$

$$x^2 + 10x - 2x - 20 = 0$$

$$x(x+10) - 2(x+10) = 0$$

$$(x+10)(x-2) = 0$$

$$x+10=0 \text{ hoặc } x-2=0$$

$$x=-10 \text{ hoặc } x=2$$

Đối chiếu ĐKXĐ, ta thấy $x=-10$ và $x=2$ đều thoả mãn.

Vậy tập nghiệm của (2) là $S = \{-10; 2\}$.

Nhận xét:

+) Bạn có thể giải phương trình sau theo cách trên:

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{2x+1}{x(x+4)}$$

+) Bạn hãy đặt ra vài bài toán tương tự như bài toán 4b).

Bài toán 13. Giải và biện luận phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{x+m}{x-1} = \frac{x+3}{x-2} \quad (1)$$

$$\text{b) } m-5 + \frac{2m+5}{x-2} = 0 \quad (2)$$

$$\text{c) } \frac{2m-2}{x-1} = m-1 \quad (3)$$

Hướng dẫn: Xem tóm tắt cách giải ở phần A.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x-1 \neq 0$ và $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ và $x \neq 2$

MTC: $(x-1)(x-2)$

Quy đồng và khử mẫu, ta được:

$$(x+m)(x-2) = (x+3)(x-1)$$

$$x^2 - 2x + mx - 2m = x^2 - x + 3x - 3$$

$$(m-4)x = 2m-3 \quad (*)$$

+ Nếu $m-4=0 \Leftrightarrow m=4$

Ta có $(*) \Leftrightarrow 0x = 5$ (vô nghiệm)

+ Nếu $m-4 \neq 0 \Rightarrow m \neq 4$

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow x = \frac{2m-3}{m-4}$$

$$\text{Vì } x \neq 1 \text{ và } x \neq 2 \Rightarrow \frac{2m-3}{m-4} \neq 1 \text{ và } \frac{2m-3}{m-4} \neq 2$$

$$\Rightarrow m \neq -1 \text{ và } 2m-3 \neq 2m-8$$

$$\Rightarrow m \neq -1$$

Đáp số:

$$+) m \neq -1 \text{ và } m \neq 4. \text{ Tập nghiệm của (1): } S = \left\{ \frac{2m-3}{m-4} \right\}.$$

$$+) m = -1 \text{ hoặc } m = 4. \text{ Tập nghiệm của (1): } S = \emptyset.$$

b) ĐKXĐ: $x \neq 2$. Khi đó, ta có:

$$(2) \Rightarrow (m-5)(x-2) + 2m+5 = 0 \Leftrightarrow (m-5)x = -15 \quad (*)$$

$$+ \text{ Nếu } m \neq 5. \text{ Ta có } (*) \Leftrightarrow x = \frac{-15}{m-5}$$

$$\text{Vì } x \neq 2 \Rightarrow \frac{-15}{m-5} \neq 2 \quad (m \neq 5)$$

$$-15 \neq 2m-10$$

$$m \neq -\frac{5}{2}$$

Đáp số: +) $m = -\frac{5}{2}$ hoặc $m = 5$. Tập nghiệm của (2): $S = \emptyset$.

+) Nếu $m \neq 5$ và $m \neq -\frac{5}{2}$. Tập nghiệm của (2): $S = \left\{ \frac{15}{5-m} \right\}$.

c) ĐKXĐ: $x \neq 1$

Quy đồng và khử mẫu, ta được:

$$2m - 2 = (m - 1)(x - 1) \Leftrightarrow (m - 1)x = 3m - 3 \quad (*)$$

+ Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Ta có $(*) \Leftrightarrow 0x = 0$ (luôn đúng với mọi x)

+ Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Ta có $(*) \Leftrightarrow x = 3$

Đáp số: + Nếu $m = 1$. Tập nghiệm của (3): $S = \mathbf{R}$

+ Nếu $m \neq 1$. Tập nghiệm của (3): $S = \{3\}$.

Bài toán 14. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm:

$$\frac{1-x}{x-m} + \frac{x-2}{x+m} = \frac{2(x-m)-2}{m^2-x^2}$$

Hướng dẫn: Tìm ĐKXĐ và đưa phương trình về dạng $ax + b = 0$, xét $a = 0$.

Lời giải

Ta có: $m^2 - x^2 = -(x^2 - m^2) = -(x - m)(x + m)$

ĐKXĐ: $x + m \neq 0$ và $x - m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm m$

Quy đồng và khử mẫu, ta được:

$$(1-x)(x+m) + (x-2)(x-m) = 2 - 2(x-m)$$

$$(2m-1)x = m-2 \quad (*)$$

+ Nếu $2m-1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

Ta có $(*) \Leftrightarrow 0x = \frac{-3}{2}$ (vô nghiệm)

+ Nếu $m \neq \frac{1}{2}$, ta có $(*) \Leftrightarrow x = \frac{m-2}{2m-1}$

$$\text{Xét } x = m \Leftrightarrow \frac{m-2}{2m-1} = m \Leftrightarrow m-2 = 2m^2-m$$

$$2m^2 - 2m + 2 = 0 \Rightarrow m^2 - m + 1 = 0$$

$$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \text{ (không xảy ra vì vế trái luôn dương)}$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } x = -m &\Leftrightarrow \frac{m-2}{2m-1} = -m \Leftrightarrow m-2 = -2m^2 + m \\ &\Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1 \end{aligned}$$

Đáp số: Phương trình vô nghiệm khi $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = \pm 1$.

Nhận xét: Qua cách giải trên, ta có phương trình đã cho có nghiệm khi $m \neq \frac{1}{2}$ và $m = \pm 1$.

(Phương trình có nghiệm $x = \frac{m-2}{2m-1}$).

Bài toán 15. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\frac{x}{x-m} - \frac{2m}{x+m} = \frac{8m^2}{x^2-m^2}$.

Lời giải

Ta có: $x^2 - m^2 = (x-m)(x+m)$

ĐKXĐ: $x-m \neq 0$ và $x+m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm m$

Quy đồng và khử mẫu, ta được:

$$x(x+m) - 2m(x-m) = 8m^2$$

$$x^2 - mx - 6m^2 = 0$$

$$x^2 + 2mx - 3mx - 6m^2 = 0$$

$$x(x+2m) - 3m(x+2m) = 0$$

$$(x+2m)(x-3m) = 0$$

$$x+2m=0 \text{ hoặc } x-3m=0$$

$$x=-2m \text{ hoặc } x=3m$$

Nếu $-2m \neq m$ và $-2m \neq -m \Rightarrow m \neq 0$

Tương tự: $3m \neq \pm m \Rightarrow m \neq 0$

Phương trình có nghiệm ($x = -2m; x = 3m$) khi $m \neq 0$

Nhận xét: với $m = 0$ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 5. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH CHẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Bất đẳng thức

- **Nhắc lại thứ tự trên tập số thực**
Trên tập số thực, với hai số a và b có ba trường hợp sau:
a) Số a bằng số b , kí hiệu $a = b$;
b) Số a lớn hơn số b , kí hiệu $a > b$;
c) Số a nhỏ hơn số b , kí hiệu $a < b$.
✓ Số a lớn hơn hoặc bằng số b , tức là $a > b$ hoặc $a = b$, kí hiệu $a \geq b$.
✓ Số a nhỏ hơn hoặc bằng số b , tức là $a < b$ hoặc $a = b$, kí hiệu $a \leq b$.
- **Khái niệm bất đẳng thức**
Ta gọi hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b, a \geq b, a \leq b$) là bất đẳng thức và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.
Chú ý: Hai bất đẳng thức $1 < 2$ và $-3 < -2$ (hay $6 > 3$ và $8 > 5$) được gọi là hai bất đẳng thức cùng chiều. Hai bất đẳng thức $1 < 2$ và $-2 > -3$ (hay $6 > 3$ và $5 < 8$) được gọi là hai bất đẳng thức ngược chiều.
- **Tính chất bắc cầu:** Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$.
Chú ý: Tương tự, các thứ tự lớn hơn ($>$), lớn hơn hoặc bằng ($\geq$), nhỏ hơn hoặc bằng ($\leq$) cũng có tính chất bắc cầu.

2. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

Khi cộng cùng một số vào hai vế của một bất đẳng thức ta được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Với ba số a, b, c , ta có:

- ✓ Nếu $a < b$ thì $a + c \leq b + c$;
- ✓ Nếu $a \leq b$ thì $a + c \leq b + c$;
- ✓ Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$;
- ✓ Nếu $a \geq b$ thì $a + c \geq b + c$.

3. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

- Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương, ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Với ba số a, b, c và $c > 0$, ta có:

- ✓ Nếu $a < b$ thì $ac < bc$;
- ✓ Nếu $a \leq b$ thì $ac \leq bc$;
- ✓ Nếu $a > b$ thì $ac > bc$;
- ✓ Nếu $a \geq b$ thì $ac \geq bc$.

- Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm, ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

Với ba số a, b, c và $c < 0$, ta có:

- ✓ Nếu $a < b$ thì $ac > bc$;
- ✓ Nếu $a \leq b$ thì $ac \geq bc$;
- ✓ Nếu $a > b$ thì $ac < bc$;
- ✓ Nếu $a \geq b$ thì $ac \leq bc$.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

Bài toán 1.

a) Nếu $x > y$. Chứng minh rằng $x + y > 2y$.

b) Cho $a > b$. Chứng minh rằng $2a + b > a + 2b$.

Hướng dẫn: Áp dụng tính chất $a > b \Rightarrow a + c > b + c$.

Lời giải

a) Ta có: $x > y \Rightarrow x + y > y + y$ hay $x + y > 2y$

b) Ta có: $a > b \Rightarrow a + a > b + a$

$$\Rightarrow 2a > b + a$$

$$\Rightarrow 2a + b > b + a + b$$

Hay $2a + b > 2b + a$ (đpcm).

Bài toán 2. Với m bất kì, chứng tỏ:

a) $1 + m < 2 + m$;

b) $m - 1 < m$;

c) $m(m + 2) < (m + 1)^2$.

Hướng dẫn: Ta có thể dùng phép biến đổi tương đương và áp dụng tính chất ở phần A.

Lời giải

a) Ta luôn có: $1 < 2 \Rightarrow 1 + m < 2 + m$ (đpcm).

b) Ta có: $-1 < 0 \Leftrightarrow -1 + m < 0 + m$

hay $m - 1 < m$ (đpcm).

c) Ta có $m(m + 2) < (m + 1)^2$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m < m^2 + 2m + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 \text{ (luôn đúng)}$$

Bạn có thể viết:

$$\text{Ta có: } 0 < 1 \Rightarrow m^2 + 2m + 0 < m^2 + 2m + 1$$

$$\Rightarrow m(m+2) < (m+1)^2 \text{ (đpcm)}.$$

Bài toán 3.

- a) Chứng minh rằng: $(x+1)^2 \geq 4x$;
b) Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + 2 \geq 2(x+y)$;
c) Chứng minh rằng: $(x-y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$.

Hướng dẫn: Áp dụng tính chất A và biến đổi tương đương.

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &\geq 4x \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 &\geq 4x \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + (-4x) &\geq 4x + (-4x) \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 &\geq 0 \text{ (luôn đúng với mọi } x \in \mathbb{R} \text{)}\end{aligned}$$

Nhận xét: Phép biến đổi trên, ta có thể thấy đó là việc "chuyển về một số hạng thì đổi dấu".

b) Ta có: $x^2 + y^2 + 2 \geq 2(x+y)$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 &\geq 2x + 2y \\ \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 &\geq 0 \text{ (luôn đúng với mọi } x, y \in \mathbb{R} \text{)}\end{aligned}$$

c) Ta có: $(x-y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 &\leq 2x^2 + 2y^2 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 2x^2 + 2y^2 - x^2 + 2xy - y^2 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq x^2 + 2xy + y^2 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq (x+y)^2 \text{ (luôn đúng với mọi } x, y \in \mathbb{R} \text{)}\end{aligned}$$

Bài toán 4.

- a) Chứng minh rằng nếu $x+4y=1$ thì $5(x^2+4y^2) \geq 1$.
b) Chứng minh rằng nếu $x+y=1$ thì $2(x^2+y^2) \geq 1$.

Hướng dẫn: a) Ta có $x+4y=1 \Rightarrow x=1-4y$.

Thay x vào bất đẳng thức cần chứng minh và biến đổi tương đương.

Lời giải

a) Ta có: $x + 4y = 1 \Rightarrow x = 1 - 4y$

Thay x vào bất đẳng thức $5(x^2 + 4y^2) \geq 1$ ta có:

$$5[(1 - 4y)^2 + 4y^2] \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 5(1 - 8y + 16y^2 + 4y^2) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 5(20y^2 - 8y + 1) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 100y^2 - 40y + 5 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 100y^2 - 40y + 5 - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 100y^2 - 40y + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (10y - 2)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

b) Ta có: $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

Thay y vào bất đẳng thức $2(x^2 + y^2) \geq 1$ ta được:

$$2[x^2 + (1 - x)^2] \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + 1 - 2x + x^2) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2 - 4x + 2x^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 2 - 1 \geq 1 - 1$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Bài toán 5.

a) Chứng minh rằng: $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$.

b) Cho $x^2 + y^2 = 1$, chứng tỏ $(x + y)^2 \leq 2$.

Hướng dẫn: a) Biến đổi tương đương.

b) Áp dụng bất đẳng thức ở câu a).

Lời giải

a) Ta có: $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \leq 2x^2 + 2y^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2x^2 + 2y^2 - x^2 - 2xy - y^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2xy + y^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (x - y)^2 \text{ (luôn đúng).}$$

b) Thay $x^2 + y^2 = 1$ vào bất đẳng thức ở câu a), ta được: $(x + y)^2 \leq 2.1 \Leftrightarrow (x + y)^2 \leq 2$.

Bài toán 6.

a) Chứng minh rằng: $(2x + y)^2 \leq 5(x^2 + y^2)$.

b) Chứng minh rằng: $(x + y)^2 \geq 4xy$.

Hướng dẫn: Biến đổi tương đương.

Lời giải

a) Ta có: $(2x + y)^2 \leq 5(x^2 + y^2)$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4xy + y^2 \leq 5x^2 + 5y^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 5x^2 + 5y^2 - 4x^2 - 4xy - y^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 4xy + 4y^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (x - 2y)^2 \text{ (luôn đúng).}$$

b) Ta có: $(x + y)^2 \geq 4xy$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

II. So sánh hai số

Bài toán 7. Cho $a - b = 5$. So sánh a và b .

Hướng dẫn: Ta có $a - b = 5 \Leftrightarrow a = b + 5$

Đưa về so sánh b và $b + 5$.

Lời giải

Ta có: $a - b = 5 \Rightarrow a = 5 + b$

Ta thấy: $0 < 5 \Rightarrow b + 0 < b + 5$

$\Rightarrow b < b + 5$ hay $b < a$.

Bài toán 8.

a) So sánh a và $a + 1$.

b) Cho $x + 1 < y + 1$. So sánh x và y .

Lời giải

a) Ta có: $0 < 1 \Rightarrow 0 + a < 1 + a$ hay $a < a + 1$

b) Ta có: $x + 1 < y + 1$

$$\Rightarrow x + 1 - 1 < y + 1 - 1$$

$$\Rightarrow x < y$$

Bài toán 9.

a) So sánh $4x^2 - 4x + 5$ và 4.

b) So sánh $x^2 + 2x + 3$ và 2.

Hướng dẫn: Đưa về tổng hoặc hiệu bình phương.

Lời giải

a) Ta có: $4x^2 - 4x + 5 = 4x^2 - 4x + 1 + 4 = (2x - 1)^2 + 4$

Vì $(2x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 + 4 \geq 0 + 4 = 4$

Vậy $4x^2 - 4x + 5 \geq 4$

(Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$).

b) Ta có: $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$

Vì $(x + 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (x + 1)^2 + 2 \geq 0 + 2 = 2$

Vậy $x^2 + 2x + 3 \geq 2$

(Dấu "=" xảy ra khi $x = -1$).

Từ kết quả bài toán trên, ta có bài toán sau:

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M_1 = 4x^2 - 4x + 5.$$

$$M_2 = x^2 + 2x + 3.$$

III. Bài toán cực trị (Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức)

Bài toán 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $A = x^2 - 4x + 5$;

b) $B = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$;

c) $C = x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 9$.

Hướng dẫn: Xem Lời giải bài toán 6 và 9.

Lời giải

a) Ta có: $A = (x - 2)^2 + 1 \geq 1$ (vì $(x - 2)^2 \geq 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$)

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 1.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

b) Ta có $B = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0$ (xem bài toán 6)

Vậy giá trị nhỏ nhất của B bằng 0.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - 1 = 0$ và $y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = y = 1$.

c) Ta có: $C = (x + y)^2 + (y + 3)^2 \geq 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C bằng 0.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x + y = 0 \text{ và } y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ và } y = -3.$$

Ta còn có thể tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 10.$$

Bài toán 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = x^2 + y^2 \text{ biết } x + y = 1.$$

Hướng dẫn: Xem bài toán 4.

Lời giải

Ta có: $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

Thay y vào biểu thức M , ta được:

$$M = x^2 + (1 - x)^2$$

$$= x^2 + 1 - 2x + x^2 = 2x^2 - 2x + 1$$

$$= 2x^2 - 2x + 1$$

$$= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \left(\text{vì } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \right)$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng $\frac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = 0$ và $y = 1 - x$

$$\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

Bài toán 12. Cho $x > 0; y > 0$ và $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = x + y$

Hướng dẫn: Xem lời giải bài 5.

Lời giải

Theo kết quả bài toán 5a) ta có: $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$

$$\text{Vì } x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow (x + y)^2 \leq 2 \cdot 2 = 4$$

$$\Rightarrow x + y \leq 2 \quad (\text{vì } x > 0; y > 0)$$

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 2.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x + y = 2$ và $x^2 + y^2 = 2$

(ta tìm được: $x = y = 1$)

Nhận xét: Ta có thể xét không cần điều kiện $x > 0, y > 0$.

IV. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

Bài toán 13. Chứng minh rằng:

a) Nếu $a > b$ thì $2a - 3 > 2b - 4$.

b) Nếu $a > 1$ thì $a^2 - a > 0$.

c) Nếu $0 < x < 1$ thì $x^2 < x$.

Hướng dẫn: Áp dụng tính chất: $a < b$ và $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

$$a > b \text{ và } b > c \Rightarrow a > c.$$

Lời giải

a) Ta có: $2 > 0$ và $a > b \Rightarrow 2a > 2b$ (nhân 2 vế với 2)

$$\Rightarrow 2a - 3 > 2b - 3$$

Lại có: $-3 > -4 \Rightarrow 2b - 3 > 2b - 4$

Vậy $2a - 3 > 2b - 3$ và $2b - 3 > 2b - 4$

$$\Rightarrow 2a - 3 > 2b - 4 \text{ (đpcm)}$$

b) Ta có: $a > 1$ và $1 > 0 \Rightarrow a > 0$

Vậy $a > 1$ và $a > 0 \Rightarrow a.a > 1.a$

$$\Rightarrow a^2 > a$$

$$\Rightarrow a^2 - a > a - a = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - a > 0 \text{ (đpcm)}.$$

c) Từ giả thiết ta có: $x > 0$ và $x < 1$

$\Rightarrow x.x < x$ (nhân hai vế với $x > 0$)

$$\Rightarrow x^2 < x \text{ (đpcm)}.$$

Nhận xét:

+) Với $0 < x < 1$ tương tự ta chứng minh được:

$$x^3 < x^2; x^4 < x^3$$

Vậy: $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < \dots < x^4 < x^3 < x^2 < x < 1$

+) Với $x > 1$, ta có: $1 < x < x^2 < x^3 < x^4 < \dots$

Bài toán 14. Cho $a > b > 0$. Chứng minh $a^2 > b^2$.

Hướng dẫn: Áp dụng tính chất: $c > 0$ và $a > 0 \Rightarrow ac > bc$ và tính chất bắc cầu.

Lời giải

Ta có $a > b$ và $a > 0 \Rightarrow a.a > ab$ hay $a^2 > ab$

Tương tự: $a > b$ và $b > 0 \Rightarrow ab > bb$ hay $ab > b^2$

Vậy $a^2 > ab$ và $ab > b^2 \Rightarrow a^2 > b^2$ (đpcm)

Nhận xét: Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$$a > b > 0 \Rightarrow a^3 > b^3; a^4 > b^4; \text{ v.v...}$$

Bài toán 15.

- a) Cho $a < b$. Chứng minh $2 - 3a > 1 - 3b$.
b) Cho $a > b$. Chứng minh $2(1 - a) < 2(1 - b)$.

Lời giải

a) Ta có $a < b$ và $-3 < 0 \Rightarrow -3a < -3b \Rightarrow 1 - 3a > 1 - 3b$

Lại có $2 > 1 \Rightarrow 2 - 3a > 1 - 3a$

Vậy $2 - 3a > 1 - 3a$ và $1 - 3a > 1 - 3b$

$$\Rightarrow 2 - 3a > 1 - 3b \text{ (đpcm).}$$

b) Ta có $a > b$ và $-1 < 0$

$$\Rightarrow -a < -b$$

$$\Rightarrow 1 - a < 1 - b$$

$$\Rightarrow 2(1 - a) < 2(1 - b) \text{ (đpcm).}$$

Bài toán 16. Cho $a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$

Lời giải

Ta có $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ (1)

Lại có $c < d \Rightarrow c + b < d + b$ (2)

Từ (1) và (2) theo tính chất bắc cầu, ta có:

$$a + c < b + d \text{ (đpcm)}$$

Nhận xét: Tính chất này có thể phát biểu như sau:

"Ta có thể cộng vế với vế hai bất đẳng thức cùng chiều:

$$a < b \text{ và } c < d \Rightarrow a + c < b + d$$

$$\text{Hoặc } a > b \text{ và } c > d \Rightarrow a + c > b + d$$

Bài toán 17. Cho a, b, c, d là các số dương $a > b$ và $c > d$.

Chứng minh rằng $ac > bd$.

(Ta có thể viết: Nếu $a > b > 0$ và $c > d > 0$ thì $ac > bd$: Nhân vế với vế hai bất đẳng thức cùng chiều với điều kiện các vế đều dương).

Lời giải

$$\text{Ta có } a > b \text{ và } c > 0 \Rightarrow ac > bc \quad (1)$$

$$\text{Lại có } c > d \text{ và } b > 0 \Rightarrow bc > bd \quad (2)$$

Từ (1) và (2), theo tính chất bắc cầu, ta có: $ac > bd$ (đpcm).

Nhận xét: Nếu $0 < a < b$ và $0 < c < d$ thì $ac < bd$ (chứng minh tương tự).

Bài toán 18.

a) Cho $a > 0$ và $b > 0$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

b) Cho $0 < a < b$ và $c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.

c) Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

d) Cho $a > 0; b > 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

Hướng dẫn: Có thể biến đổi tương đương.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2$$

vì $a > 0$ và $b > 0 \Rightarrow ab > 0$ nên ta có:

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \Leftrightarrow ab \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2.ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \Leftrightarrow \frac{a}{b}(b+c) < \frac{a+c}{b+c}(b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+c)}{b} \cdot b < (a+c)b$$

$$\Leftrightarrow a(b+c) < (a+c)b$$

$$\Leftrightarrow a(b+c) < (a+c)b$$

$$\Leftrightarrow ac < bc \text{ (vì } c > 0)$$

$$\Leftrightarrow a < b \text{ (luôn đúng, theo giả thiết } 0 < a < b)$$

Nhận xét: Ta có thể làm nhanh hơn, bằng cách "nhân chéo".

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \Leftrightarrow a(b+c) < b(a+c) \text{ (vì } b > 0; b+c > 0)$$

$$\Leftrightarrow ab + ac < ab + bc$$

$$\Leftrightarrow ac < bc$$

$$\Leftrightarrow a < b.$$

c) Ta có: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot b < \frac{1}{b} \cdot b$ (vì $b > 0$)

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a} \cdot a < 1 \cdot a \text{ (vì } a > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow b < a \text{ (luôn đúng vì theo giả thiết } a > b > 0 \text{)}.$$

d) Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

$$\Leftrightarrow (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4 \text{ (vì } a > 0; b > 0 \Rightarrow a+b > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \frac{1}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + b \cdot \frac{1}{b} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \text{ (đây là bài toán a)}$$

Nhận xét: Ta có thể viết: $(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4 \text{ (} a > 0; b > 0 \text{)}.$

Bài toán 19. Cho $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; $b > 0$; $d > 0$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Lời giải

Ta chứng minh $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$

Thật vậy: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$

$$\Leftrightarrow a(b+d) < b(a+c) \text{ (vì } b > 0; d > 0 \Rightarrow b+d > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow ab + ad < ba + bc$$

$$\Leftrightarrow ad < bc$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ (vì } b > 0; d > 0 \text{ và giả thiết đã cho)}$$

Chứng minh tương tự: Với $b > 0, d > 0$, ta có $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Bài toán 20. Cho $2x+1 < 2y+1$. So sánh x và y ?

Hướng dẫn: Dùng phép biến đổi tương đương.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2x+1 < 2y+1 \Leftrightarrow 2x+1-1 < 2y+1-1$$

$$\Leftrightarrow 2x < 2y$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \frac{1}{2} < 2y \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x < y.$$

Bài toán 21. Cho $1-3a \geq 1-3b$. So sánh a và b ?

Hướng dẫn: Biến đổi tương đương.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 1-3a \geq 1-3b \Leftrightarrow -3a \geq -3b \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)(-3a) \leq \left(-\frac{1}{3}\right)(-3b) \Leftrightarrow a \leq b$$

Bài toán 22. So sánh a, b biết: $2a+5 < 2b+5$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2a+5 < 2b+5 \Leftrightarrow 2a < 2b$$

$$\Leftrightarrow a < b.$$

Bài toán 23. Số a là số âm hay dương, nếu: $-3a > -5a$?

Lời giải

$$\text{Nếu } a < 0 \text{ và } -5 < -3 \Rightarrow -5a > -3a$$

$$\text{Trái giả thiết: } -3a > -5a$$

$$\text{Nếu } a = 0 \Rightarrow (-3).0 = (-5).0 \text{ (không đúng)}$$

$$\text{Vậy } a > 0 \text{ (lúc đó ta luôn có } -5 < -3 \Rightarrow -5a > -3a)$$

Bài toán 24. Cho $x > 0, x \neq 1$. So sánh $x + \frac{1}{x}$ và 2.

Hướng dẫn: Cho $x = 3 \Rightarrow 3 + \frac{1}{3} > 2$.

$$\text{Ta chứng minh: } x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ (} x > 0 \text{)}.$$

Lời giải

Ta chứng minh $x + \frac{1}{x} > 2$ ($x > 0, x \neq 1$)

$$\text{Ta có: } x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \text{ (vì } x > 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\text{Vì } x \neq 1 \Rightarrow (x-1)^2 > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} > 2.$$

Nhận xét: Bài toán sau đây cũng được xét tương tự:

So sánh $\frac{4x^2 + 1}{x}$ và 4 (với $x > 0$).

V. BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Bài toán 25. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + \frac{1}{x}$; với $x > 0$.

Hướng dẫn: Xem bài toán 24.

Lời giải

Theo bài toán 11, ta có với $x > 0$: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 2.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$

$$\text{Tương tự: } \frac{4x^2 + 1}{x} \geq 4 \text{ (} x > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 1 \geq 4x$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Bài toán 26. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{-x^2 + 2x - 5}$.

Hướng dẫn: $-x^2 + 2x - 5 = -(x^2 - 2x + 1) - 4 = -4 - (x-1)^2 \leq -4$

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{1}{-4 - (x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2 + 4}$$

$$\text{Vì } (x-1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2 + 4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{(x-1)^2 + 4} \geq -\frac{1}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{1}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$.

Bài toán 27. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

Hướng dẫn: Từ $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$. Thế y vào biểu thức P .

Lời giải

Ta có: $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$.

$$\begin{aligned} \text{Thế vào } P, \text{ ta được: } P &= x^2 + (1-x)^2 \\ &= 2x^2 - 2x + 1 \\ &= 2(x^2 - x) + 1 \\ &= 2\left[\left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\right] + 1 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ và $x + y = 1 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

Bạn có thể xét bài toán sau:

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 4x^2 + y^2$ với $4x + y = 1$.

(Ta có $4x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 4x$.

Thay y vào P , ta được: $P = 4x^2 + (1 - 4x)^2 = 20x^2 - 8x + 1$

$$\Rightarrow 5P \geq 1 \Rightarrow P \geq \frac{1}{5}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{1}{5}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$ và $y = \frac{1}{5}$)

(Bạn cần suy nghĩ một chút để xét $5P$).

Bài toán 28. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{(x+1)^2}; x > 0$.

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \geq 4ab$.

(Xem bài toán 3a) §1 Liên hệ giữa thứ tự phép cộng: $(x+1)^2 \geq 4x$

Lời giải

Ta có: $(x+1)^2 \geq 4x$ (Xem bài toán 3.a; §1)

$$\text{Vì } x > 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{x} \geq 4 \Rightarrow \frac{x}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{4}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$

Nhận xét: Bạn có thể suy nghĩ để tìm cách chứng minh: $\frac{x}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{4}$ (với $x > 0$)

Cách khác: Đặt $y = x+1 \Rightarrow P = \frac{y-1}{y^2}$.

Bài toán sau: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(x+1)^2}{x} (x > 0)$.

Lời giải như sau: $P = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = x + 2 + \frac{1}{x}$.

Ta có $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow P = x + \frac{1}{x} + 2 \geq 4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 4.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$

Bạn hãy giải bài toán sau:

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{4x^2 + 1}{x} (x > 0)$

Lời giải

$$P = \frac{4x^2 - 4x + 1 + 4x}{x} = \frac{(2x-1)^2}{x} + 4 \geq 4$$

Vì $x > 0$ và $(2x-1)^2 \geq 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 4.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Bài toán 29. Chứng minh rằng: $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$

Hướng dẫn: Biến đổi tương đương.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } xy &\leq \frac{(x+y)^2}{4} \Leftrightarrow 4xy \leq (x+y)^2 \\ &\Leftrightarrow 4xy \leq x^2 + 2xy + y^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2 \text{ (luôn đúng)}\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Nhận xét:

+ Cho $x + y = S$ (không đổi), ta có kết quả: Nếu hai số có tổng không đổi thì tích của chúng đạt giá trị lớn nhất khi hai số bằng nhau.

+ Cho hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng đạt giá trị nhỏ nhất khi hai số bằng nhau.

Áp dụng:

Cho hình chữ nhật có chu vi 20(m), tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn: Gọi x là chiều dài của hình chữ nhật,

chiều rộng sẽ là: $\frac{20}{2} - x = 10 - x$ (10 m là nửa chu vi hình chữ nhật)

Diện tích hình chữ nhật là: $(10 - x)x$

Vậy tích $(10 - x)x$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow 10 - x = x$

$$\Leftrightarrow 2x = 10$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

Khi $x = 5 \Rightarrow 10 - x = 5$

Vậy trong các hình chữ nhật có chu vi 10 m (không đổi) thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

* Cho $x > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + \frac{1}{x}$

Ta có : $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ (không đổi)

Vậy $x + \frac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = \frac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1$$

Vì $x > 0$, nên ta lấy $x = 1$.

Giá trị nhỏ nhất của $x + \frac{1}{x}$ bằng 2 (với $x = 1$).

Bài toán tương tự:

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2(1 - x^2)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = \frac{x^2 + 1}{x} (x > 0)$.

Bài 6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.****1. Khái niệm bất phương trình bậc nhất một ẩn.**

- Bất phương trình dạng $ax + b < 0$ (hoặc $ax + b > 0, ax + b \leq 0, ax + b \geq 0$) trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$ được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn x .
- Nghiệm của bất phương trình:
 - Số x_0 là một nghiệm của bất phương trình $A(x) < B(x)$ nếu $A(x_0) < B(x_0)$ là khẳng định đúng.
 - Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình đó.

2. Cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

- Bất phương trình bậc nhất một ẩn $ax + b < 0 (a \neq 0)$ được giải như sau:

$$ax + b < 0$$

$$ax < -b.$$

$$\text{- Nếu } a > 0 \text{ thì } x < -\frac{b}{a}.$$

$$\text{- Nếu } a < 0 \text{ thì } x > -\frac{b}{a}.$$

Chú ý: Các bất phương trình $ax + b > 0, ax + b \leq 0, ax + b \geq 0$ được giải tương tự.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP**I. Giải bất phương trình**

Bài toán 1. Giải bất phương trình:

$$\text{a) } x - 5 > 4 \quad (1)$$

$$\text{b) } 8x + 2 < 7x - 1 \quad (2)$$

$$\text{c) } -3x > -4x + 1 \quad (3)$$

$$\text{d) } 3x + 4 > 2x + 3 \quad (4)$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } (1) \Leftrightarrow x > 4 + 5 \Leftrightarrow x > 9.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $x > 9$.

$$\text{b) Ta có } (2) \Leftrightarrow 8x - 7x < -1 - 2 \Leftrightarrow x < -3$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là $x < -3$.

$$\text{c) Ta có } (3) \Leftrightarrow 4x - 3x > 1 \Leftrightarrow x > 1$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (3) là $x > 1$.

$$\text{d) Ta có } (4) \Leftrightarrow 3x - 2x > -4 + 3 \Leftrightarrow x > -1$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (4) là $x > -1$.

Bài toán 2. Giải bất phương trình:

$$\text{a) } -4x < 12 \quad (1)$$

$$\text{b) } -x > 2 \quad (2)$$

$$\text{c) } 3x < 4 \quad (3)$$

$$\text{d) } 5 - 2x \geq 0 \quad (4)$$

$$\text{e) } 2 - 5x \leq 27 \quad (5)$$

$$\text{f) } 3 - 4x \geq 31 \quad (6)$$

Lời giải

a) Ta có $(1) \Leftrightarrow (-4x) : (-4) > 12 : (-4) \Leftrightarrow x > -3$

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $x > -3$.

b) Ta có $(2) \Leftrightarrow (-x) : (-1) < 2 : (-1) \Leftrightarrow x < -2$

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là $x < -2$.

c) Ta có $(3) \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}$

Vậy nghiệm của bất phương trình (3) là $x \leq \frac{4}{3}$.

d) Ta có $(4) \Leftrightarrow -2x \geq -5$.

$$\Leftrightarrow (-2x) : (-2) \leq (-5) : (-2)$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (4) là $x \leq \frac{5}{2}$.

e) Ta có $(5) \Leftrightarrow -5x \leq 27 - 2$

$$\Leftrightarrow -5x : (-5) \geq 25 : (-5)$$

$$\Leftrightarrow x \geq -5$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (5) là $x \geq -5$

f) Ta có $(6) \Leftrightarrow -4x \geq 31 - 3$

$$\Leftrightarrow -4x : (-4) \leq 28 : (-4)$$

$$\Leftrightarrow x \leq -7$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (6) là $x \leq -7$

Bài toán 3. Giải bất phương trình:

a) $\frac{2}{3}x > -6$ (1)

b) $3 - \frac{1}{4}x > 2$ (2)

c) $6 - \frac{3}{5}x < 4$ (3)

d) $\frac{6-4x}{5} \leq 1$ (4)

Lời giải

a) Ta có $(1) \Leftrightarrow \frac{2}{3}x \cdot \frac{3}{2} > -6 \cdot \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow -x > -9$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $-x > -9$

$$\begin{aligned}\text{b) Ta có (2)} &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x > 2-3 \\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{4}x\right) \cdot (-4) < (-1) \cdot (-4) \\ &\Leftrightarrow x < 4\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là $x < 4$

$$\begin{aligned}\text{c) Ta có (3)} &\Leftrightarrow -\frac{3}{5}x < 4-6 \\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{3}{5}x\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) > (-2) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow x > \frac{10}{3}\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (3) là $x > \frac{10}{3}$

$$\begin{aligned}\text{d) Ta có (4)} &\Leftrightarrow 5 \cdot \frac{6-4x}{5} \leq 5 \cdot 1 \\ &\Leftrightarrow 6-4x \leq 5 \\ &\Leftrightarrow -4x \leq -1 \\ &\Leftrightarrow -4x : (-4) \geq (-1) : (-4) \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (4) là $x \geq \frac{1}{4}$

Bài toán 4. Giải bất phương trình:

$$\text{a) } \frac{1-2x}{4} - 2 < \frac{1-5x}{8} \quad (1)$$

$$\text{b) } 3 - \frac{1}{4}x > 2 \quad (2)$$

Hướng dẫn: Quy đồng mẫu thức ở cả hai vế

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{a) Ta có (1)} &\Leftrightarrow \frac{2(1-2x)-2 \cdot 8}{8} < \frac{1-5x}{8} \\ &\Leftrightarrow 2-4x-16 < 1-5x \\ &\Leftrightarrow 5x-4x < 1+14 \\ &\Leftrightarrow x < 15\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $x < 15$

$$\text{b) Ta có (2)} \Leftrightarrow \frac{3(x-1)-12}{12} > \frac{4(x+1)+8 \cdot 12}{12}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 3x - 3 - 12 &> 4x + 4 + 96 \\ \Leftrightarrow 3x - 4x &> 100 + 15 \\ \Leftrightarrow -x &> 115 \\ \Leftrightarrow -x \cdot (-1) &< 115 \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow x &< -115\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là $\Leftrightarrow x < -115$

Bài toán 5. Giải bất phương trình:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2x + 1 > 2(x + 1) & (1) \qquad \qquad \text{b) } 5 + 5x < 5(x + 2) \qquad (2) \\ \text{c) } 3(x - 2)(x + 2) < 3x^2 + x & (3) \qquad \qquad \text{d) } (x + 4)(5x - 1) > 5x^2 + 16x + 2 \quad (4) \end{array}$$

Hướng dẫn: Rút gọn và đưa về dạng $ax + b > 0$ hoặc $ax + b < 0$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{a) Ta có } (1) &\Leftrightarrow 2x + 1 > 2x + 2 \\ &\Leftrightarrow 2x - 2x > 2 - 1 \\ &\Leftrightarrow 0x > 1 \text{ (sai)}\end{aligned}$$

Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn bất phương trình đã cho.

$$\begin{aligned}\text{b) Ta có } (2) &\Leftrightarrow 5 + 5x < 5x + 10 \\ &\Leftrightarrow 5x - 5x < 10 - 5 \\ &\Leftrightarrow 0x < 5 \text{ (luôn đúng } \forall x \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là tập hợp $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\text{c) Ta có } (3) &\Leftrightarrow 3(x^2 - 4) < 3x^2 + x \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 12 < 3x^2 + x \\ &\Leftrightarrow -12 < x \\ &\Leftrightarrow x > -12\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (3) là $x > -12$

$$\begin{aligned}\text{d) Ta có } (4) &\Leftrightarrow 5x^2 + 20x - x - 4 > 5x^2 + 16x + 2 \\ &\Leftrightarrow 19x - 16x > 2 + 4 \\ &\Leftrightarrow 3x > 6 \\ &\Leftrightarrow x > 6 : 3 \\ &\Leftrightarrow x > 2\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (4) là $x > 2$

Bài toán 6. Tìm x , sao cho:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (x - 1)x < 0 & (1) \qquad \qquad \text{b) } (x - 2)(x - 5) > 0 \quad (2) \\ \text{c) } \frac{x + 2}{x - 3} > 0 & (3) \qquad \qquad \text{d) } \frac{x + 1}{x + 5} > 0 \quad (4) \end{array}$$

Hướng dẫn: Ta xét dấu một tích hoặc một thương. Không nhân hai nhị thức ở bài a); b). Không nhân hai vế với mẫu bài c); d).

Lời giải

a) *Trường hợp 1:* $x > 0$ và $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x > 0$ và $x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Trường hợp 2: $x < 0$ và $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x < 0$ và $x > 1$ (không tồn tại x)

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $0 < x < 1$

b) *Trường hợp 1:* $x - 2 > 0$ và $x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ và $x > 5 \Leftrightarrow x > 5$.

Trường hợp 2: $x - 2 < 0$ và $x - 5 < 0 \Leftrightarrow x < 2$ và $x < 5 \Leftrightarrow x < 2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là $x > 5$ hoặc $x < 2$

c) *Trường hợp 1:* $x + 2 < 0$ và $x - 3 > 0$

$$x < -2 \text{ và } x > 3 \text{ (không tồn tại } x \text{)}$$

Trường hợp 2: $x + 2 > 0$ và $x - 3 < 0$

$$x > -2 \text{ và } x < 3$$

$$\Leftrightarrow -2 < x < 3$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (3) là $-2 < x < 3$

d) Tương tự b).

Vậy nghiệm của bất phương trình (4) là $x > -1$ hoặc $x < -5$

Bài toán 7. Với giá trị nào của x thì:

a) Giá trị phân thức $\frac{5-2x}{6}$ lớn hơn giá trị phân thức $\frac{5x-2}{3}$?

b) Giá trị phân thức $\frac{1,5-x}{5}$ nhỏ hơn giá trị phân thức $\frac{4x+5}{2}$?

Hướng dẫn: a) Tìm x sao cho $\frac{5-2x}{6} > \frac{5x-2}{3}$

Lời giải

a) Xét bất phương trình $\frac{5-2x}{6} > \frac{5x-2}{3}$ (*)

$$\text{Ta có (*)} \Leftrightarrow \frac{5-2x}{6} > \frac{2(5x-2)}{6}$$

$$\Leftrightarrow 5-2x > 10x-4$$

$$\Leftrightarrow -2x-10x > -5-4$$

$$\Leftrightarrow -12x > -9$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{-9}{-12} \Leftrightarrow x < \frac{3}{4}$$

Đáp số: $x < \frac{3}{4}$

b) Xét bất phương trình $\frac{1,5-x}{5} < \frac{4x+5}{2}$ (*)

Ta có (*) $\Leftrightarrow \frac{2(1,5-x)}{10} < \frac{5(4x+5)}{10}$

$$\Leftrightarrow 3-2x < 20x+25$$

$$\Leftrightarrow -2x-20x < 25-3$$

$$\Leftrightarrow -22x < 22$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{22}{-22} \Leftrightarrow x > -1$$

Đáp số: $x > -1$

II. Bài toán có tham số

Bài toán 8.

a) Tìm m để phương trình $x-3=2m+4$ có nghiệm dương?

b) Tương tự phương trình $2x-5=m+8$ có nghiệm âm?

Hướng dẫn: Giải phương trình bậc nhất một ẩn.

Lời giải

a) Ta có $x-3=2m+4 \Leftrightarrow x=2m+7$

$$\text{Xét } x > 0 \Leftrightarrow 2m+7 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{7}{2}$$

b) Ta có $2x-5=m+8 \Leftrightarrow 2x=m+13 \Leftrightarrow x=\frac{m+13}{2}$

$$\text{Xét } x < 0 \Leftrightarrow \frac{m+13}{2} < 0 \Leftrightarrow m+13 < 0 \Leftrightarrow m < -13.$$

Bài toán 9. Giải và biện luận bất phương trình:

$$m(x-m) > x-1 \quad (*)$$

Hướng dẫn: Đưa về dạng $ax+b > 0$.

Lời giải

Ta có (*) $\Leftrightarrow mx-m^2 > x-1 \Leftrightarrow mx-x > m^2-1$

$$\Leftrightarrow (m-1)x > m^2-1 \quad (**)$$

+) Trường hợp 1: $m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow x > \frac{m^2-1}{m-1} \Leftrightarrow x > m+1$$

+) Trường hợp 2: $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow 0x > 0 \text{ (không tồn tại } x)$$

+) Trường hợp 3: $m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$

Ta có $(*) \Leftrightarrow x < \frac{m^2 - 1}{m - 1} \Leftrightarrow x < m + 1$

Đáp số: • $m > 1$: Tập nghiệm của $(*)$: $S = \{x | x > m + 1\}$

• $m = 1$: Tập nghiệm của $(*)$: $S = \emptyset$

• $m < 1$: Tập nghiệm của $(*)$: $S = \{x | x < m + 1\}$

Nhận xét: Bất phương trình $ax + b > 0$, ta phải xét ba trường hợp: $a < 0$; $a = 0$ hoặc $a > 0$

* Bạn có thể giải bài toán sau:

Giải và biện luận bất phương trình: $mx + 1 \geq mx + m^2$

Bài toán 10. Một ngân hàng áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 12 tháng là 7,5% năm. Bà Ngân dự kiến gửi một khoản tiền vào ngân hàng này và cần số tiền lãi hàng năm ít nhất là 50 triệu để chi tiêu. Hỏi số tiền bà Ngân cần gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

Lời giải

Gọi x (triệu đồng) là số tiền bà Ngân cần gửi tiết kiệm. Ta có số tiền lãi gửi tiết kiệm x (triệu đồng) trong một năm là $0,075x$ (triệu đồng)

Muốn có số tiền lãi ít nhất là 50 triệu đồng/năm thì ta phải có:

$$0,075x \geq 50$$

$$x \geq 50 : 0,075$$

$$x \geq 666,6$$

Vậy bà Ngân cần gửi ngân hàng ít nhất 667 triệu đồng.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

A. TRẮC NGHIỆM:

1. Nghiệm của bất phương trình $-2x + 1 < 0$ là:

- A. $x < \frac{1}{2}$. B. $x > \frac{1}{2}$. C. $x \leq \frac{1}{2}$. D. $x \geq \frac{1}{2}$.

2. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x}{2x+1} + \frac{3}{x-5} = \frac{x}{(2x+1)(x-5)}$ là:

- A. $x \neq -\frac{1}{2}$. B. $x \neq -\frac{1}{2}$ và $x \neq -5$.
C. $x \neq -5$. D. $x \neq -\frac{1}{2}$ hoặc $x \neq 5$.

3. Phương trình $x - 1 = m + 4$ có nghiệm lớn hơn 1 với:

- A. $m \geq -4$. B. $m \leq 4$. C. $m > -4$. D. $m < -4$.

4. Nghiệm của bất phương trình $1 - 2x \geq 2 - x$ là:

- A. $x > \frac{1}{2}$. B. $x < \frac{1}{2}$. C. $x \leq -1$. D. $x \geq -1$.

5. Cho $a > b$. Khi đó ta có:

- A. $2a > 3b$. B. $2a > 2b + 1$. C. $5a + 1 > 5b + 1$. D. $-3a < -3b - 3$.

Hướng dẫn - Đáp số

$$1. -2x + 1 < 0 \Leftrightarrow 1 < 2x \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Chọn B.

$$\text{Cách khác: } -2x + 1 < 0 \Leftrightarrow -2x < -1$$

$$(-2x) : (-2) > (-1) : (-2)$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

$$2. \text{ĐKXD: } 2x + 1 \neq 0 \text{ và } x - 5 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2} \text{ và } x \neq 5$$

Chọn D.

$$3. x - 1 = m + 4 \Leftrightarrow x = m + 4 + 1 \Leftrightarrow x = m + 5$$

$$\text{Xét } m + 5 > 1 \Leftrightarrow m > -4.$$

Chọn C.

$$4. 1 - 2x \geq 2 - x \Leftrightarrow -x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$$

Chọn C.

$$5. a > b \Rightarrow 5a > 5b \Rightarrow 5a + 1 > 5b + 1$$

Chọn C.

B. TỰ LUẬN

1. Giải các phương trình sau:

a) $(3x-1)^2 - (x+2)^2 = 0$;

b) $x(x+1) = 2(x^2-1)$.

2. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x}{x-5} - \frac{2}{x+5} = \frac{x^2}{x^2-25}$;

b) $\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2-x+1} = \frac{3}{x^3+1}$

3. Cho $a < b$, hãy so sánh:

a) $a+b+5$ với $2b+5$;

b) $-2a-3$ với $-(a+b)-3$.

4. Giải các bất phương trình:

a) $2x+3(x+1) > 5x-(2x-4)$;

i) $(x+1)(2x-1) < 2x^2-4x+1$.

5. a) Chứng minh rằng: nếu $x > 0$ và $y > 0$ thì $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.**b) Chứng minh bất đẳng thức: $a^4+1 \geq a(a^2+1)$** **6. Giải bất phương trình:**

a) $(x+2)^2 + 3(x+1) \geq x^2 - 4$ (1)

b) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \leq x - \frac{x-3}{4}$ (2)

7. Giải bất phương trình:

a) $(x+1)(2x-2)-3 > -5x-(2x+1)(3-x)$ (1)

b) $(x-3)^2 + 4(2-x) > x(x+7)$ (2)

8. a) Cho $-3a > 2a$. Chứng tỏ a âm.**b) Cho $2x+y=5$. Chứng tỏ $x^2+y^2 \geq 5$.****9. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |2-x| + 3$.****10. Giải bất phương trình:**

a) $\frac{x-1}{x+1} > 0$;

b) $\frac{x-2}{x-1} < 0$.

Hướng dẫn giải

1. a) $(3x-1)^2 - (x+2)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow [(3x-1)-(x+2)][(3x-1)+(x+2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)(4x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x-3=0 \text{ hoặc } 4x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ hoặc } x = -\frac{1}{4}.$$

b) $x(x+1) = 2(x^2-1)$

$$\Leftrightarrow x(x+1) - 2(x-1)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[x-2(x-1)]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2-x)=0$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \text{ hoặc } 2-x=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ hoặc } x=2$$

2. a) ĐKXD: $x \neq \pm 5$. Khi đó:

$$\frac{x}{x-5} - \frac{2}{x+5} = \frac{x^2}{x^2-25}. \text{ MTC: } x^2-25$$

$$\Leftrightarrow x(x+5)-2(x-5)=x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+5x-2x+10=x^2$$

$$\Leftrightarrow 3x=-10 \Leftrightarrow x=-\frac{10}{3} \text{ (nhận)}$$

Phương trình có nghiệm $x=-\frac{10}{3}$.

$$\text{b) } \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2-x+1} = \frac{3}{x^3+1} \quad (*)$$

$$\text{MTC: } x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

$$\text{ĐKXD: } x^3+1 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -1.$$

Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow (x^2-x+1)-x(x+1)=3$$

$$\Leftrightarrow x^2-x+1-x^2-x=3$$

$$\Leftrightarrow -2x=2 \Leftrightarrow x=-1 \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình (*) vô nghiệm.

3. a) Ta có: $a < b \Rightarrow a+b < b+b \Rightarrow a+b < 2b$

$$\Rightarrow a+b+5 < 2b+5.$$

b) Ta có: $a < b \Rightarrow -a > -b$

$$\Rightarrow -a-a > -b-a$$

$$\Rightarrow -2a > -(a+b)$$

$$\Rightarrow -2a-3 > -(a+b)-3$$

4. a) $2x + 3(x + 1) > 5x - (2x - 4)$

$$\Leftrightarrow 2x + 3x + 3 > 5x - 2x + 4$$

$$\Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{1}{2}$.

b) $x + 1)(2x - 1) < 2x^2 - 4x + 1$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x + 2x - 1 < 2x^2 - 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow 5x < 2$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{2}{5}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < \frac{2}{5}$

5. a) Ta có: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow xy \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2xy \text{ (vì } x > 0 \text{ và } y > 0 \Rightarrow xy > 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

b) Ta có: $a^4 + 1 \geq a(a^2 + 1)$

$$\Leftrightarrow a^4 + 1 \geq a^3 + a$$

$$\Leftrightarrow a^4 - a^3 + 1 - a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3(a - 1) - (a - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(a^3 - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2(a^2 + a + 1) \geq 0$$

$$\text{Ta thấy } a^2 + a + 1 = a^2 + 2a \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

Vì $a^2 + a + 1 > 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$, $(a-1)^2 \geq 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$.

Vậy $(a-1)^2(a^2 + a + 1) \geq 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$.

6. a) $(1) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + 3x + 3 \geq x^2 - 4$

$$\Leftrightarrow 7x + 7 \geq -4$$

$$\Leftrightarrow 7x \geq -11$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{11}{7}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $x \geq -\frac{11}{7}$

b) $(2) \Leftrightarrow 6(x-1) - 4(x-2) \leq 12x - 3(x-3)$

$$\Leftrightarrow 6x - 6 - 4x + 8 \leq 12x - 3x + 9$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2 \leq 9x + 9$$

$$\Leftrightarrow -7x \leq 7$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là $x \geq -1$.

7.a) $(1) \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 2x - 2 - 3 > -5x - (6x + 2x^2 + 3 - x)$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5 \geq -5x - 6x + 2x^2 - 3 + x$$

$$\Leftrightarrow 10x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{5}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (1) là $x \geq \frac{1}{5}$.

b) $(2) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 8 - 4x > x^2 + 7x$

$$\Leftrightarrow -17x > -17$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{-17}{-17}$$

$$\Leftrightarrow x < 1$$

Vậy nghiệm của bất phương trình (2) là $x < 1$.

8. a) Ta có: $-3a > 2a \Rightarrow -3a - 2a > 0 \Rightarrow -5a > 0 \Rightarrow a < 0$

b) Vì $2x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 2x$

$$\begin{aligned}\text{Vậy } x^2 + y^2 &= x^2 + (5 - 2x)^2 \\ &= x^2 + 25 - 20x + 4x^2 \\ &= 5x^2 - 20x + 25 \\ &= 5(x^2 - 4x + 4) + 5 \\ &= 5(x - 2)^2 + 5 \geq 5 \quad (\text{vì } (x - 2)^2 \geq 0)\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra *khi* $x = 2, y = 1$.

9. Ta có $|2 - x| \geq 0$ với mọi $x \Rightarrow |2 - x| + 3 \geq 3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 3.

Dấu “=” xảy ra khi $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

10. a) Trường hợp 1: $x - 1 > 0$ và $x + 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ và $x > -1 \Rightarrow x > 1$.
Trường hợp 2: $x - 1 < 0$ và $x + 1 < 0 \Rightarrow x < 1$ và $x < -1 \Rightarrow x < -1$.

Vậy $x > 1$ hoặc $x < -1$.

b) Trường hợp 1: $x - 2 > 0$ và $x - 1 < 0$
 $\Leftrightarrow x > 2$ và $x < 1$ (vô nghiệm)

Trường hợp 2: $x - 2 < 0$ và $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x < 2$ và $x > 1 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

Đáp số: $1 < x < 2$.