

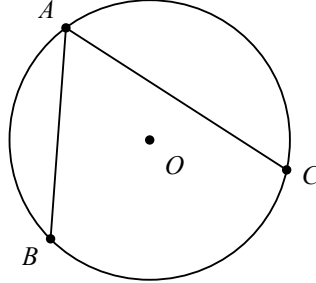
CHƯƠNG IX. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

BÀI 27. GÓC NỘI TIẾP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong gọi là cung bị chắn.



2. Định lý: Trong một đường tròn số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

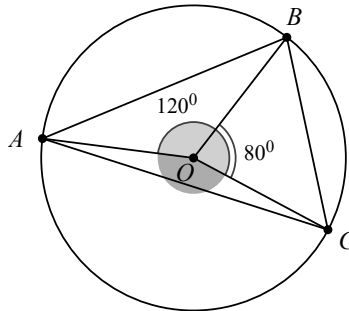
3. Hệ quả: Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tính toán

Bài toán 1. Cho các điểm như hình vẽ. Tính số đo các góc của tam giác ABC , biết rằng $\widehat{AOB} = 120^\circ$, $\widehat{BOC} = 80^\circ$.



Lời giải

Xét đường tròn (O) , ta có:

Vì góc nội tiếp $\widehat{BAC}$ và góc ở tâm $\widehat{BOC}$ cùng chắn cung nhỏ BC

$$\text{nên } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ$$

Vì góc nội tiếp $\widehat{ACB}$ và góc ở tâm $\widehat{AOB}$ cùng chắn cung nhỏ AB nên

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$$

Xét tam giác ABC , ta có:

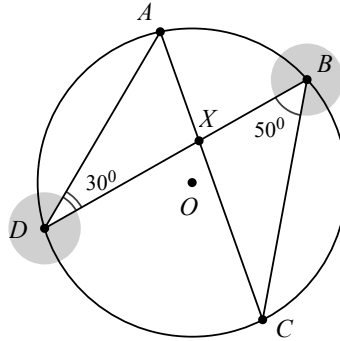
$$\widehat{ABC} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ACB})$$

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ)$$

$$\widehat{ABC} = 80^\circ.$$

Bài toán 2. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AC, BD cắt nhau tại X (hình vẽ). Tính số đo góc AXB , biết rằng $\widehat{ADB} = 30^\circ$ và $\widehat{DBC} = 50^\circ$.

Lời giải



Do hai góc nội tiếp $\widehat{CAD}$ và $\widehat{CBD}$ cùng chắn cung CD nên $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = 50^\circ$.

Tương tự $\widehat{ADB}$ và $\widehat{ACB}$ cùng chắn cung AB nên $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 30^\circ$.

Xét tam giác AXD có: $\widehat{CAD} + \widehat{ADB} + \widehat{AXD} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{AXD} = 180^\circ - (\widehat{CAD} + \widehat{ADB})$$

$$\Rightarrow \widehat{AXD} = 180^\circ - (50^\circ + 30^\circ)$$

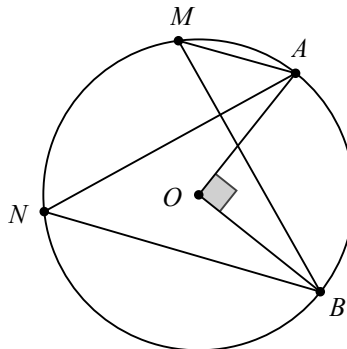
$$\Rightarrow \widehat{AXD} = 100^\circ.$$

Ta có: $\widehat{AXB} + \widehat{AXD} = 180^\circ$ (kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{AXB} = 180^\circ - \widehat{AXD}$$

$$\Rightarrow \widehat{AXB} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

Bài toán 3. Tính số đo của $\widehat{AMB}$ và $\widehat{ANB}$ trong hình vẽ.



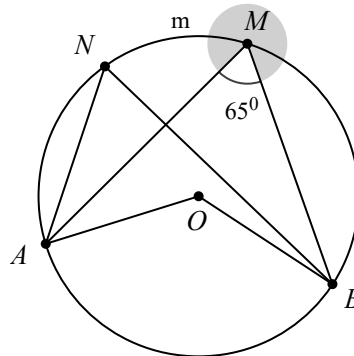
Lời giải

Xét đường tròn (O) , ta có:

Do hai góc nội tiếp $\widehat{AMB}, \widehat{ANB}$ và góc ở tâm $\widehat{AOB}$ cùng chắn cung nhỏ AB nên

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

Bài toán 4. Tính số đo các góc ANB, AOB và cung lớn AB trong hình vẽ.



Lời giải

Xét đường tròn (O) , ta có:

Do hai góc nội tiếp $\widehat{ANB}$ và $\widehat{AMB}$ cùng chắn cung nhỏ AB
 nên $\widehat{ANB} = \widehat{AMB} = 65^\circ$.

Vì góc nội tiếp $\widehat{AMB}$ và góc ở tâm $\widehat{AOB}$ cùng chắn cung nhỏ AB

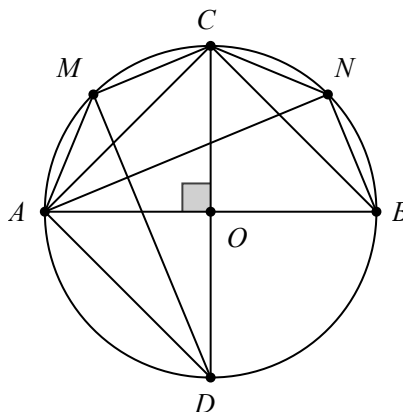
Nên $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB} = 2 \cdot 65^\circ = 130^\circ$

Số cung nhỏ AB : số $\widehat{AB} = \widehat{AOB} = 130^\circ$ nên số đo cung lớn là: số $\widehat{AmB} = 360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$

Bài toán 5. Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc của nửa đường tròn (O) . Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên hai cung nhỏ $\widehat{AC}, \widehat{BC}$ và chia mỗi cung đó thành hai cung bằng nhau (hình vẽ). Tìm số đo các góc sau:

- a) $\widehat{ACB}, \widehat{ADC}$;
 b) $\widehat{ADM}, \widehat{NCB}$.

Lời giải



Xét đường tròn (O) , ta có:

- a) $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Vì góc nội tiếp $\widehat{ADC}$ và góc ở tâm $\widehat{AOC}$ cùng chắn cung nhỏ AC

$$\text{nên } \widehat{ADC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ.$$

b) Vì M, N lần lượt chia hai cung AC và BC thành hai cung nhỏ có số đo bằng nhau nên: số

$$\widehat{AM} = \text{sđ } \widehat{CM} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AC} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

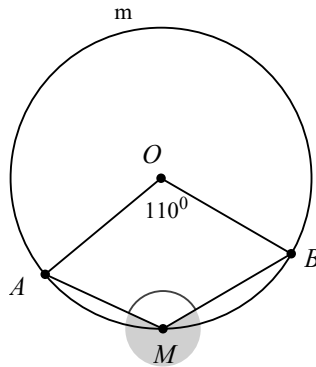
$$\text{Tương tự sđ } \widehat{CN} = \text{sđ } \widehat{BN} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BC} = 45^\circ$$

$$\widehat{ADM} = \frac{1}{2} \cdot \text{sđ } \widehat{AM} = \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ \text{ (số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn).}$$

$$\text{Tương tự } \widehat{NCB} = \text{sđ } \widehat{BN} = \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ$$

Bài toán 6. Tính số đo góc AMB (xem hình vẽ).

Lời giải



Xét đường tròn (O) , ta có:

$\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn cung lớn AB .

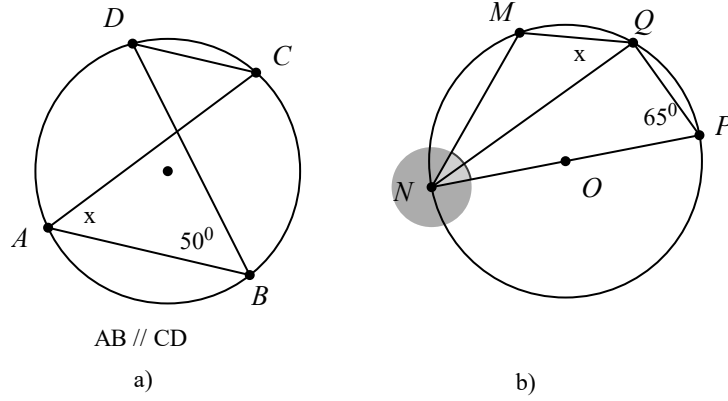
$$\text{nên } \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AmB} \text{ (số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn).}$$

$$= \frac{1}{2} (360^\circ - \text{sđ } \widehat{AMB})$$

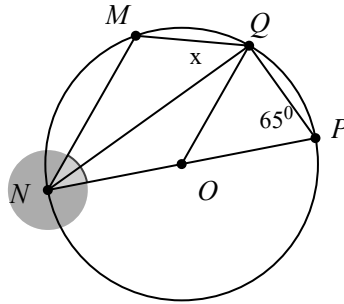
$$= \frac{1}{2} (360^\circ - \widehat{AOB})$$

$$= \frac{1}{2} (360^\circ - 110^\circ) = 125^\circ.$$

Bài toán 7. Tính số đo x trong mỗi trường hợp ở hình.



Lời giải



Xét hình a), ta có: $AB \parallel CD$ (gt)

$$\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{B} = 50^\circ \text{ (cặp góc so le trong)}$$

Xét đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D , ta có:

Do hai góc nội tiếp $\widehat{BAC}$ và $\widehat{BDC}$ cùng chắn cung nhỏ BC nên $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 50^\circ$ hay $x = 50^\circ$.

Xét hình b), (xem hình vẽ)

Nối O với Q , xét tam giác NQP có: $OQ = ON = OP$ hay $OQ = \frac{1}{2}NP$

Do đó tam giác NQP vuông tại Q hay $\angle NQP = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{PNQ} = 90^\circ - \widehat{NPQ} = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$$

Mà $\widehat{MNQ} = \widehat{PNQ} = 25^\circ$ (gt)

$$\Rightarrow \text{sđ } \widehat{MQ} = 50^\circ \text{ (số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn).}$$

Ta có $\widehat{NPQ}$ là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{QMN}$ mà $\widehat{NPQ} = 65^\circ$

$$\widehat{QMN} = 2 \cdot 65^\circ = 130^\circ \text{ (số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn).}$$

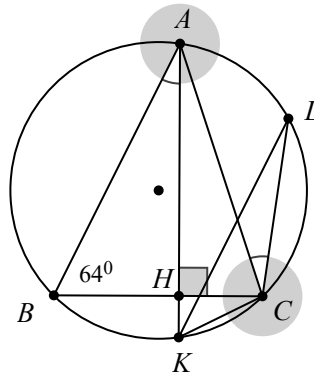
$$\Rightarrow \text{sđ } \widehat{MN} = 130^\circ - 50^\circ = 80^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ sđ } \widehat{MN} = 40^\circ$$

Bài toán 8. Ba điểm A, B, C thuộc đường tròn (O) sao cho $\widehat{ABC} = 64^\circ$. Từ A vẽ AH vuông góc với BC và AH cắt đường tròn (O) tại K .

- a) Tính $\widehat{AKC}, \widehat{BAK}$;
 b) Gọi KL là một dây cung song song với dây AB . Tính $\widehat{ACL}$.

Lời giải

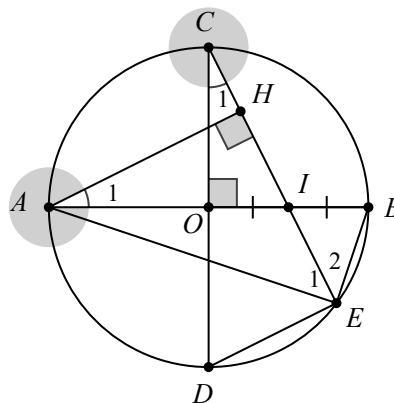


- a) Ta có: $\widehat{AKC} = \widehat{ABC} = 64^\circ$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC).
 Tam giác AHB vuông tại H (gt) có $\widehat{ABC} = 64^\circ$ (gt)
 $\Rightarrow \widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BK).
 b) Ta có: $\widehat{ACL} = \widehat{AKL}$ (1) (góc nội tiếp cùng chắn cung AL).
 mà $KL \parallel AB \Rightarrow \widehat{AKL} = \widehat{BAL}$ (2) (cặp góc so le trong)
 Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ACL} = \widehat{BAK} = 26^\circ$

Bài toán 9. AB và CE là hai đường kính vuông góc của đường tròn $(O; R)$. Kẻ dây CE qua trung điểm I của OB . AE cắt CD ở F .

- a) Tính độ dài DF .
 b) Kẻ đường cao AH của tam giác ACE . Tính diện tích tam giác ACE .

Lời giải



- a) I là trung điểm của $OB \Rightarrow IO = IB = \frac{OB}{2} = \frac{R}{2}$
 $\Rightarrow AI = AO + OI = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2} \Rightarrow \frac{AI}{BI} = \frac{\frac{3R}{2}}{\frac{R}{2}} = 3$
 Lại có $AB \perp CD$ tại O (gt) $\Rightarrow \widehat{CA} = \widehat{CB} \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{E_2}$
 $\triangle AEB$ có EI là phân giác ta có: $\frac{EA}{EB} = \frac{IA}{IB} = 3$
 Dễ thấy $\triangle AOF \sim \triangle AEB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OA}{OF} = \frac{EA}{EB} = 3 \Rightarrow OF = \frac{OA}{3} = \frac{R}{3} \Rightarrow FD = \frac{2R}{3}$$

b) Xét tam giác vuông COI theo định lý Pythagore ta có:

$$CI^2 = CO^2 + OI^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{5R^2}{4} \Rightarrow CI = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos C_1 = \frac{OC}{CI} = \frac{R}{\frac{R\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Ta có: } \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \text{ (cùng phụ với } \widehat{I_1} \text{)} \Rightarrow \cos A_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } AHI \text{ ta có } AH = AI \cos A_1 = \frac{3R\sqrt{5}}{5}$$

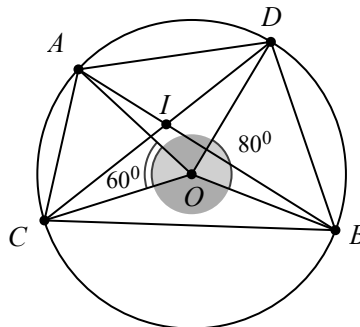
$\triangle CED$ vuông tại E (CD là đường kính)

$$\text{Ta có } CE = CD \cdot \cos C_1 = 2R \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4R\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Vậy } S_{ACE} = \frac{1}{2} CE \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot \frac{4R\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3R\sqrt{5}}{5} = \frac{6R^2}{5}$$

II. Chứng minh

Bài toán 10. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AB, CD cắt nhau tại điểm I nằm trong (O) (Hình vẽ)



a) Biết rằng $\widehat{AOC} = 60^\circ, \widehat{BOD} = 80^\circ$. Tính số đo của góc AID .

b) Chứng minh rằng $IA \cdot IB = IC \cdot ID$

Lời giải

a) (Xem hình vẽ)

Xét đường tròn (O) . Nối B với C ta có góc nội tiếp $\widehat{ABC}$ và góc ở tâm cùng chắn cung nhỏ

$$AC \text{ nên } \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

Tương tự với góc nội tiếp $\widehat{BCD}$ và góc ở tâm $\widehat{BOD}$.

$$\text{Ta có: } \widehat{BCD} = \frac{1}{2} \widehat{BOD} = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ.$$

Xét tam giác BIC , ta có:

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - (\widehat{BCD} + \widehat{ABC})$$

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - (40^\circ + 30^\circ)$$

$$\widehat{BIC} = 110^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{BIC} = 110^\circ \text{ (đối đỉnh)}$$

b) Nối A với C, B với D.

Xét tam giác AIC và tam giác BID có $\widehat{CAB}$ và $\widehat{CDB}$ là hai góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ BC nên $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ (*)

Tương tự $\widehat{ACD}$ và $\widehat{ABD}$ là hai góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ AD nên $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ (**)

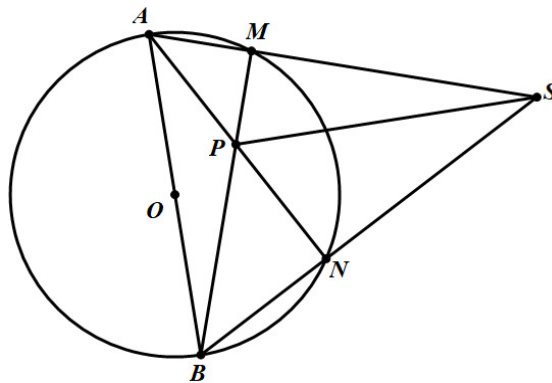
Từ (*) và (**) $\Rightarrow \triangle AIC \sim \triangle DBI$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{ID}{IB}$$

$$\Rightarrow IA \cdot IB = IC \cdot ID \text{ (đpcm)}$$

Bài toán 11. Cho đường tròn (O), đường kính AB và điểm S nằm ngoài (O). Cho hai đường thẳng SA, SB lần lượt cắt (O) tại M (khác A) và N (khác B). Gọi P là giao điểm của BM và AN (hình vẽ). Chứng minh rằng SP vuông góc với AB.

Lời giải



a) (Xem hình vẽ).

Nối O với M, O với N

$$\text{Ta có } OM = OA = OB \text{ hay } OM = \frac{1}{2} AB$$

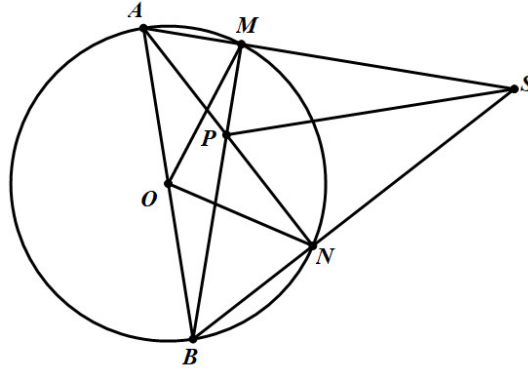
Chứng minh tương tự, ta có tam giác ABN vuông tại N $\Rightarrow AN \perp SB$ hay BM và AN là hai đường cao của tam giác SAB. Mà SA và SB cắt nhau tại P nên P là trực tâm của tam giác SAB $\Rightarrow SP \perp AB$. (đpcm).

Bài toán 12. Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O). Lấy D trên cạnh BC, AD cắt cung BC ở E. Chứng minh rằng.

$$\text{a) } \widehat{AEC} > \widehat{AEB};$$

$$\text{b) } AB \cdot CD = AD \cdot CE$$

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$) và $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$) mà $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ (vì $AB < AC$)

Do đó $\widehat{AEC} > \widehat{AEB}$

b) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CED$ có: $\widehat{ABD} = \widehat{DEC}$ (cmt) $\widehat{BAE} = \widehat{BCE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BE}$)

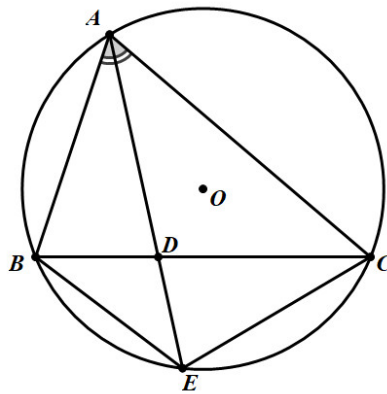
Vậy $\triangle ABD \sim \triangle CED$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{CE} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = AD \cdot CE$ (đpcm).

Bài toán 13. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn (O) . Tia phân giác của góc A cắt BC ở D và cắt đường tròn ở E . Chứng minh rằng:

a) $AB \cdot AC = AD \cdot AE$;

b) $BE^2 = AE \cdot DE$.

Lời giải



a) Ta có AE là phân giác của góc A nên $\widehat{BAE} = \widehat{CAE} \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{CE}$

Lại có $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}$

(góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$)

Do đó $\triangle ABD \sim \triangle AEC$ (g.g)

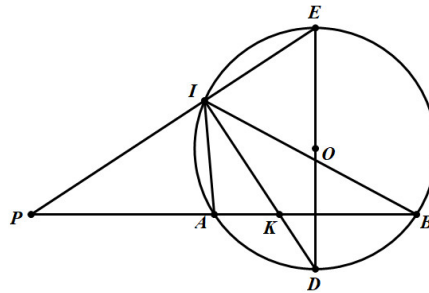
$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

b) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle BDE$ có: $\widehat{AEB}$ chung, $\widehat{BAE} = \widehat{EBC}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau $\widehat{BE} = \widehat{CE}$).

$$\text{Do đó } \triangle ABE \sim \triangle BDE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow BE^2 = AE \cdot DE.$$

Bài toán 14. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O), kẻ cát tuyến PAB. Gọi D là điểm chính giữa của cung AB. Kẻ đường kính DE, PE cắt (O) tại I, ID cắt AB tại K. Chứng minh rằng: $PA.KB = PB.KA$.

Lời giải



Ta có: $\widehat{DA} = \widehat{DB} \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{BID}$ hay IK là phân giác của $\triangle AIB$.

Khi đó: $\frac{KA}{KB} = \frac{IA}{IB} \quad (1)$

Mặt khác $\widehat{EID} = 90^\circ$ (ED là đường kính) $\Rightarrow PI \perp KI$

Do đó PI là phân giác góc ngoài của $\triangle AIB$.

Ta có: $\frac{PA}{PB} = \frac{IA}{IB}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{KA}{KB}$

$\Rightarrow PA.KB = PB.KA$

Nhân xét: Khi cát tuyến PAB trở thành đường kính và dây DE vuông góc với AB (ED không là đường kính). Ta có bài toán tương tự sau:

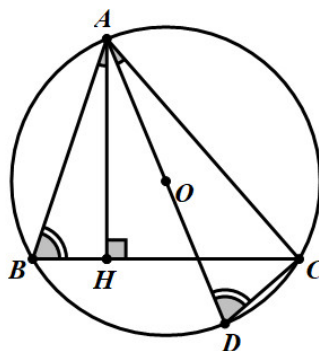
"Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây ED (không qua tâm O) vuông góc với AB.

Gọi M là điểm bất kì thuộc (O) và ME không song song với AB và K là giao điểm của MD với AB. P là giao điểm của tia ME với đường thẳng AB. Chứng minh rằng: $PB.KA = PA.KB$.

Hướng dẫn: Hãy chứng tỏ MA, MB lần lượt là phân giác trong, ngoài của $\triangle MPK$.

Bài toán 15. Đỉnh A của tam giác ABC với các góc nhọn được nối với tâm O của đường tròn ngoại tiếp. Từ A vẽ đường cao AH. Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Lời giải



Kéo dài AO về phía O ta được đường kính AD.

Ta có: $\widehat{CDA} = \widehat{CBA}$

(cùng chắn cung nhỏ AC).

Mặt khác $AC \perp CD$ (vì $\widehat{ACD}$ chắn cung nửa đường tròn) hay $\triangle ACD$ vuông tại C và $\triangle AHB$ vuông (giả thiết). Có $\widehat{CDA} = \widehat{CBA}$

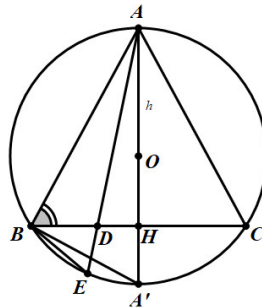
suy ra $\widehat{DAC} = \widehat{BAH}$ hay $\widehat{OAC} = \widehat{BAF}$

Bài toán 16. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn (O; R), qua A kẻ đường thẳng cắt cạnh BC tại D và cắt (O) tại E.

a) Chứng minh rằng $AB^2 = AD \cdot AE$.

b) Chứng tỏ tích $AD \cdot AE$ không đổi (không phụ thuộc vào vị trí điểm E) hãy tính tích $AD \cdot AE$ theo R và đường cao h của tam giác kẻ từ A.

Lời giải



a) $\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow AB = AC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{E}_1$ (góc nội tiếp chắn cung bằng nhau $\widehat{AB} = \widehat{AC}$)

Do đó hai tam giác ADB và ABE đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AE$$

b) $AD \cdot AE = AB^2$, không đổi.

Kẻ đường kính AA' của đường tròn (O). Gọi H là giao điểm của AA' và BC ta có AH là đường cao của $\triangle ABC$.

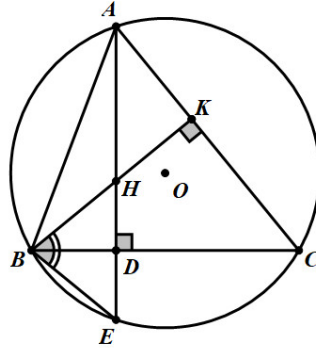
Xét tam giác vuông ABA' có đường cao BH. Áp dụng hệ thức $b^2 = a \cdot b'$ ta có $AB^2 = AA' \cdot AH = 2R \cdot h$ (không đổi).

Bài toán 17. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao AD, BK cắt nhau tại H. AD cắt đường tròn (O) tại E.

a) Chứng minh BC là tia phân giác của $\widehat{HBE}$.

b) Chứng minh E đối xứng với H qua BC.

Lời giải



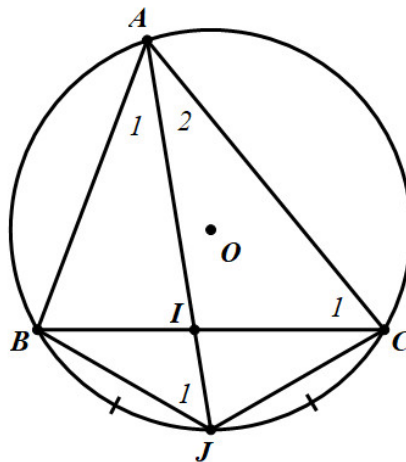
- a) Ta có: $\widehat{CBK} = \widehat{CAD}$ (cùng phụ với $\hat{C}$)
 $\widehat{CAD} = \widehat{CBE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{CE}$)
 $\Rightarrow \widehat{CBK} = \widehat{CBE}$

Chúng tỏ BC là phân giác của $\widehat{HBE}$.

- b) $\triangle HBE$ có đường cao BD đồng thời là đường phân giác (cmt). Do đó BD cũng là đường trung trực của đoạn HE hay E và H đối xứng nhau qua BC.

Bài toán 18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi J là điểm chính giữa của cung nhỏ BC và I là giao điểm của AJ với BC. Chứng minh rằng: $AI^2 = AB \cdot AC - IB \cdot IC$.

Lời giải



J là điểm chính giữa cung BC $\Rightarrow \widehat{JB} = \widehat{JC}$

$$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \triangle ABJ \sim \triangle AIC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AI} = \frac{AJ}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AI \cdot AJ \quad (1)$$

Ta lại có: $\widehat{J_1} = \widehat{C_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB).

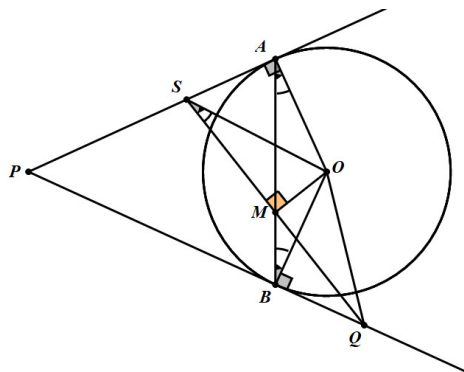
Do đó $\triangle BIJ \sim \triangle AIC$ (g.g)

$$\Rightarrow IB \cdot IC = AI \cdot IJ \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AB \cdot AC - IB \cdot IC = AI(AJ - IJ) = AI^2$$

Bài toán 19. Từ một điểm P nằm ngoài đường tròn (O; R), kẻ hai tiếp tuyến PA, PB đến (O) (A, B, là hai tiếp điểm). Trên dây AB lấy M bất kì. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với OM cắt PA tại S và PB tại Q. Chứng minh rằng: $MS = MQ$.

Lời giải



Ta có $PA \perp OA$ hay $SA \perp OA$ (tính chất tiếp tuyến)

$$\Rightarrow \widehat{\text{SAO}} = 90^\circ$$

nên A thuộc đường tròn đường kính SO.

$$\text{OM} \perp \text{SQ}(\text{gt}) \Rightarrow \widehat{\text{SMO}} = 90^\circ$$

nên M thuộc đường tròn đường kính SO .

Do đó bốn điểm A, O, M, S cùng nằm trên một đường tròn.

Nối SO ta có $\widehat{\text{MSO}} = \widehat{\text{MAO}}$ (1) (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{\text{MO}}$).

Dễ thấy tứ giác OMBQ nội tiếp ($\widehat{OMQ} = \widehat{OPQ} = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{MBO} = \widehat{MQO} \text{ (2) (góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{MO} \text{)}.$$

Lại có $\triangle AOB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO}$ (3)

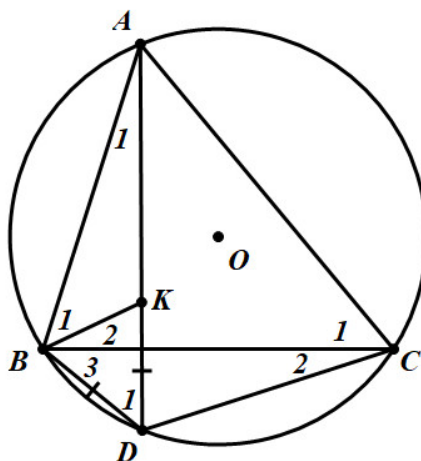
Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{MSO} = \widehat{MQO}$ hay ΔSOQ cân tại O có OM là đường cao nên OM cũng đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow SM = QM$.

Bài toán 20. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Một điểm D nằm trên cung nhỏ BC . Trên đoạn DA lấy $DK = DB$.

a) Chứng tỏ $\triangle BDK$ đều.

b) Chứng tỏ: $AD = BD + CD$.

Lời giải



a) $\triangle BDK$ cân ($DB = DK$) có $\widehat{D_1} = \widehat{C_1} = 60^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$). Vậy $\triangle BDK$ đều.

b) $\triangle BDK$ đều (cmt) $\Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{B_3} = 60^\circ$ mà $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 60^\circ$ (gt) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_3}$.

Lại có: $BK = BD = DK$ (cmt)

Xét $\triangle AKB$ và $\triangle CDB$ có:

$$\widehat{B_1} = \widehat{B_3} \text{ (cmt)}$$

$$AB = CB \text{ (gt)}$$

và $\widehat{A_1} = \widehat{C_2}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BD}$)

Vậy $\triangle AKB = \triangle CDB$ (g.c.g)

$$\Rightarrow AK = DC \text{ mà } AD = AK + KD \Rightarrow AD = BD + CD$$

c) Xét ba điểm B, D, C có: $DB + DC \geq BC \Rightarrow 2(DB + DC) \geq 2BC$

mà $DB + DC = DA \Rightarrow DA + DB + DC \geq 2BC$ (không đổi)

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow D$ trùng B hoặc C .

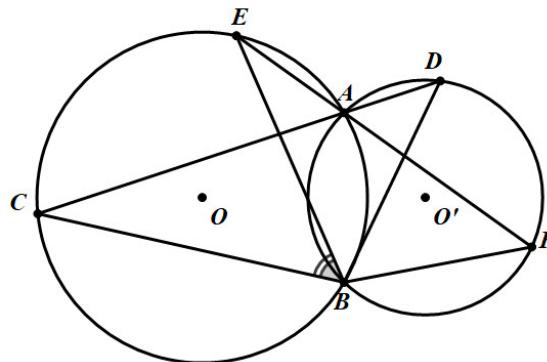
Vậy khi D trùng B hoặc trùng C thì $DA + DB + DC$ nhỏ nhất:

Bài toán 21. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Qua A vẽ hai cát tuyến CAD và EAF (C và E thuộc (O) , D và F thuộc (O')). Chứng minh rằng:

a) $BC \cdot BF = BD \cdot BE$.

b) $\triangle BCE$ và $\triangle BDF$ đồng dạng.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{BCA} = \widehat{BEA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$)

$\widehat{BDA} = \widehat{BFA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$).

Do đó $\triangle BCD \sim \triangle BEF$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BC}{BE} = \frac{BD}{BF} \Rightarrow BC \cdot BF = BD \cdot BE$$

b) Theo chứng minh câu a: $\triangle BCD \sim \triangle BEF$

$$\Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{EBF}$$

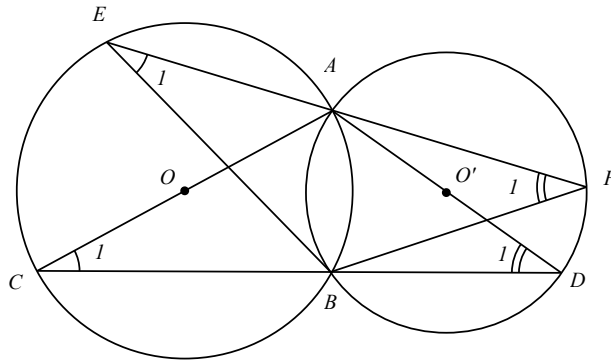
$$\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{FBD}.$$

Bài toán 22. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Vẽ các đường kính AC và AD của hai đường tròn.

a) Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng.

b) Một cát tuyến qua A cắt (O) tại E và (O') tại F . Chứng minh rằng: $AC.BF = AD.BE$

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{ABC} = 90^\circ$ (AC là đường kính) $\Rightarrow AB \perp CB$

Chứng minh tương tự $AB \perp DB$

Suy ra C, B, D thẳng hàng.

b) Có $\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$ (Góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$)

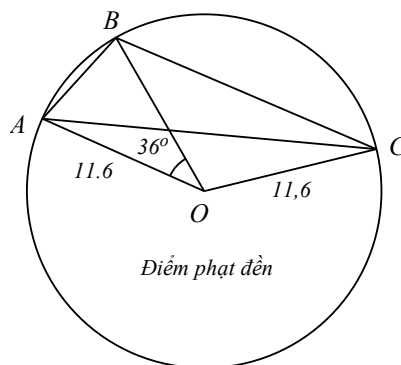
$\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$ (Góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$)

Do đó, $\triangle ACD \sim \triangle BEF$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AC}{BE} = \frac{AD}{BF} \Rightarrow AC.BF = AD.BE$.

III. Toán thực tế

Bài toán 23. Trên sân bóng, khi trái được đặt tại điểm phạt đền thì có góc sút bằng 30° và trái bóng cách mỗi cọc gôn 11,6m. Hỏi khi trái bóng đặt ở vị trí cách điểm phạt đền 11,6m thì góc sút bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi A, B là chân hai cọc gôn và O là điểm phạt đền.

Ta có $OA = OB = OC = 11,6$ m

Vậy A, B, C nằm trên đường tròn tâm O bán kính 11,6 m và góc ở tâm $\widehat{AOB} = 36^\circ$

Do đó, góc nội tiếp $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot 36^\circ = 18^\circ$.

Vậy góc sút bằng 18°

HẾT

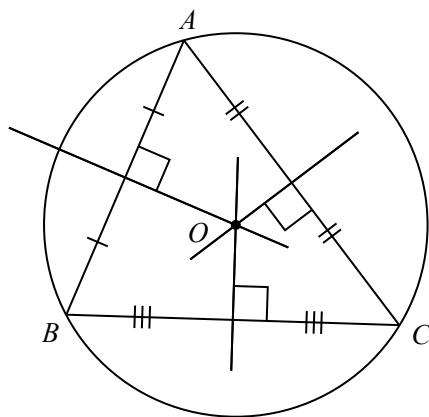
CHƯƠNG IX. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

Bài 28. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP CỦA MỘT TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường tròn ngoại tiếp một tam giác

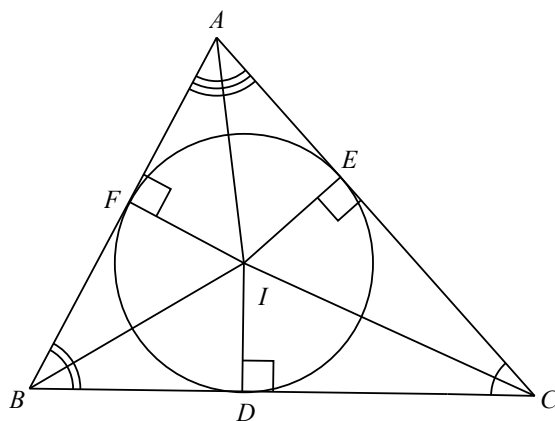
Đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác. Khi đó tam giác gọi là tam giác nội tiếp đường tròn.



- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác.
- Bán kính là khoảng cách từ giao điểm của ba đường trung trực đến một điểm bất kì của tam giác.

2. Đường tròn nội tiếp một tam giác

Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác. Khi đó tam giác được gọi là tam giác ngoại tiếp đường tròn.



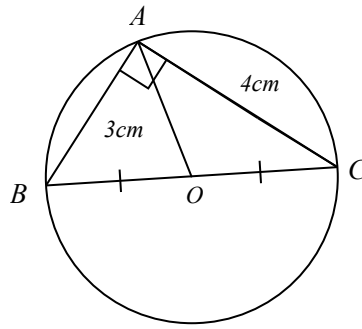
- Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của ba đường phân giác trong.
- Bán kính bằng khoảng cách từ giao điểm đó đến một cạnh bất kì của tam giác.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tính toán

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải



Gọi O là trung điểm của cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC . Ta có AO là trung tuyến của tam giác vuông ABC nên $OA = \frac{1}{2}BC = OB = OC$.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn có tâm O là trung điểm của BC .

Vì tam giác ABC vuông tại A nên theo định lý Pythagore, ta có:

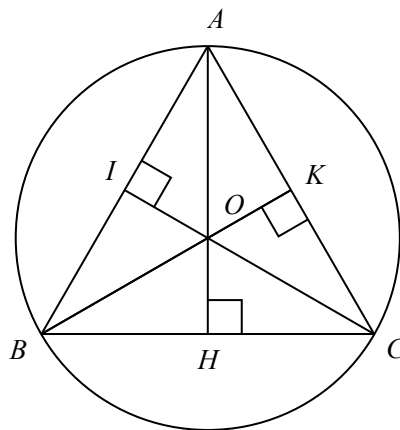
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{25} = 5(\text{cm})$$

Vậy bán kính của đường tròn là $5 : 2 = 2,5(\text{cm})$

Bài toán 2. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh bằng a .

Lời giải:



Gọi O là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác đều ABC thì O đồng thời là trọng tâm và trực tâm của tam giác.

Ta có $OA = OB = OC = \frac{2}{3}AH$ (H là chân đường cao kẻ từ A)

Do đó, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC .

Mặt khác, xét tam giác AHB vuông tại H .

Theo định lý Pythagore, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \Rightarrow AH^2 = AB^2 - HB^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ (Tính chất trọng tâm)}$$

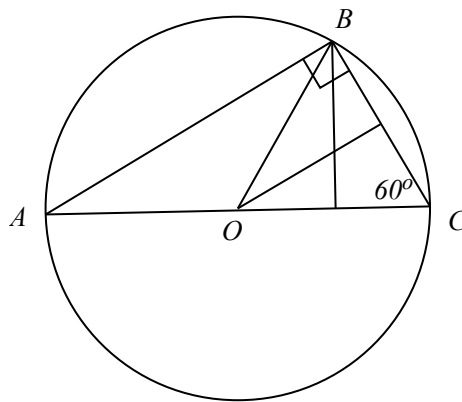
Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm tam giác và có bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Bài toán 3: Cho tam giác ABC vuông tại B có $\widehat{C} = 60^\circ$, $BC = 3\text{ cm}$ và O là trung điểm AC . Xác định tâm, bán kính và vẽ đường tròn ngoại tiếp của

a) $\triangle ABC$;

b) $\triangle BCD$.

Lời giải



a) Tam giác ABC vuông tại B có $\widehat{C} = 60^\circ$ nên tam giác ABC là nửa tam giác đều.

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 30^\circ \Rightarrow AC = 2BC = 2 \cdot 3 = 6(\text{cm})$$

Theo bài toán 1 ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $\frac{AC}{2} = \frac{6}{2} = 3(\text{cm})$ và tâm O là trung điểm của cạnh huyền AC .

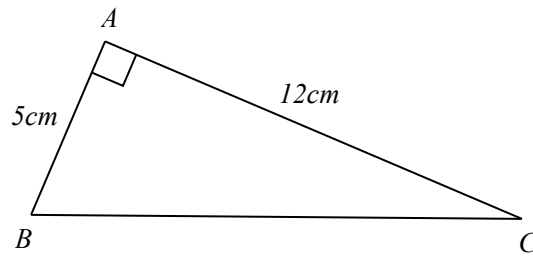
b) Dễ thấy tam giác BCD đều (Theo bài toán 2)

Gọi I là trọng tâm của tam giác đều BCD , ta có I là tâm của đường tròn ngoại tiếp vì cạnh của tam giác đều BCD là $3(\text{cm})$ nên bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều BCD là

$$\frac{3\sqrt{3}}{3} \text{ (Xem lời giải bài toán 2)}$$

Bài toán 4. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 5\text{ cm}$, $AC = 12\text{ cm}$

Lời giải:



Tam giác ABC vuông tại A (GT)

Theo định lí Pythagore, ta có:

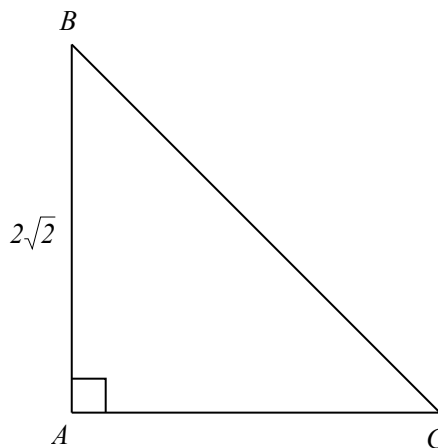
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{169} = 13(\text{cm})$$

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A là: $\frac{BC}{2} = \frac{13}{2}(\text{cm})$ (nửa cạnh huyền BC)

Bài toán 5. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Tính bán kính của (O) , biết rằng $\triangle ABC$ vuông cân tại A và có cạnh bằng $2\sqrt{2}$ cm.

Lời giải



(Xem hình vẽ)

Ta có tam giác ABC vuông cân tại A (GT)

Theo định lí Pythagore, ta có:

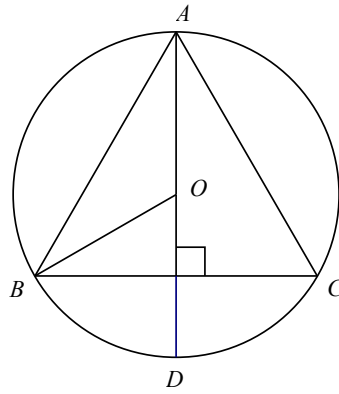
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 16$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{16} = 4(\text{cm})$$

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A có độ dài bằng nửa cạnh huyền BC tức là 2(cm).

Bài toán 6. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng đường tròn (O) có bán kính bằng 3 cm. Tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải



Kẻ đường cao AH vì tam giác ABC đều (gt) nên đường cao AH đồng thời là đường phân giác của góc BAC , ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{CAH} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Kéo dài AH cắt đường tròn (O) tại D . Khi đó $\widehat{BOD}$ và $\widehat{BAD}$ lần lượt là góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn $(\widehat{BD}) \Rightarrow \widehat{BOD} = 2.\widehat{BAD} = 2.30^\circ = 60^\circ$.

Tam giác BHO vuông tại H có cạnh huyền $OB = 3\text{ cm}$ (gt) và $\widehat{BOD} = 60^\circ$.

Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:
 $BH = OB.\sin BOH = 3.\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (cm)

Vì $\triangle ABC$ đều nên đường cao AH đồng thời là trung tuyến hay H là trung điểm của BC .

$$\Rightarrow BC = 2BH = 2.\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Xét tam giác AHB vuông tại H có cạnh huyền: $AB = BC = 3\sqrt{3}$ (cm) và $\widehat{BAH} = 30^\circ$ (cmt)

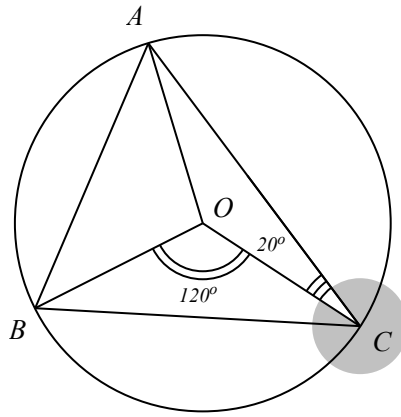
Theo định lí về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH = AB.\cos BAH = 3\sqrt{3}.\cos 30^\circ = \frac{9}{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{Gọi } S_{ABC} \text{ là diện tích tam giác đều, ta có: } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH.BC = \frac{1}{2} . \frac{9}{2} . 3\sqrt{3} = \frac{27\sqrt{3}}{4} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng $\widehat{BOC} = 120^\circ$ và $\widehat{OCA} = 20^\circ$. Tính số đo các góc của tam giác ABC .

Lời giải



Xét đường tròn (O) , ta có $\widehat{BAC}$ và $\widehat{BOC}$ và góc ở tâm cùng chắn $\widehat{BC}$. nên

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ.$$

Tam giác $\widehat{BOC}$ cân tại O có góc ở đỉnh $\widehat{BOC} = 120^\circ$ (GT)

$$\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{180^\circ - \widehat{BOC}}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ.$$

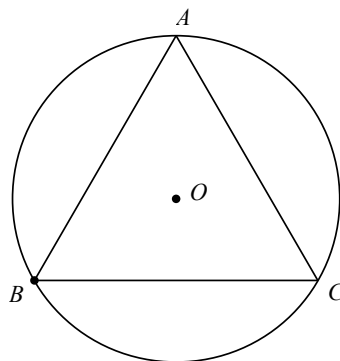
Do đó, $\widehat{BCA} = \widehat{OCB} + \widehat{OCA} = 30^\circ + 20^\circ = 50^\circ$.

Xét tam giác ABC , ta có:

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} &= 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{BCA}) \\ &= 180^\circ - (60^\circ + 50^\circ) = 70^\circ \end{aligned}$$

Vậy số đo các góc của tam giác ABC là: $\widehat{BAC} = 60^\circ$; $\widehat{ABC} = 70^\circ$; $\widehat{BCA} = 50^\circ$.

Bài toán 8. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 3cm và nội tiếp đường tròn (O) như hình vẽ.

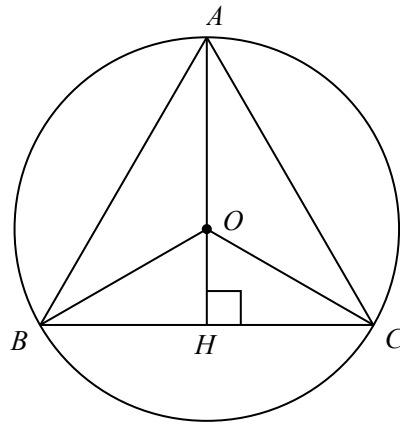


a) Tính bán kính R của đường tròn (O) .

b) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung BC và cung nhỏ BC .

Hướng dẫn: Ngoài cách giải như bài toán 2, chúng ta sẽ có cách khác như sau:

Lời giải



a) Kẻ đường cao AH của tam giác đều ABC có

cạnh 3 cm ta có $AH = \frac{3\sqrt{3}}{4}(\text{cm})$

Vì $\triangle ABC$ đều nên trực tâm O cùng trùng với

trọng tâm, khi đó $OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}(\text{cm})$

Vậy bán kính R của đường tròn (O) là: $OA = \sqrt{3}(\text{cm})$

b) Gọi S_{ABC} là diện tích tam giác đều ABC cạnh 3 cm , ta có: $S_{ABC} = \frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}(\text{cm}^2)$.

Gọi S là diện tích hình tròn (O) ta có:

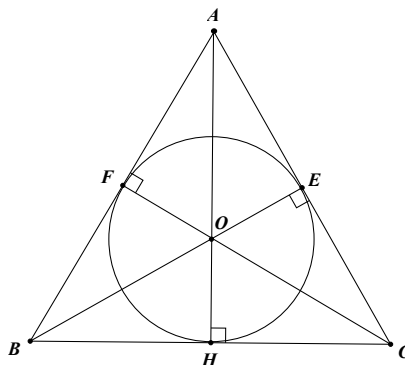
$$S = \pi \cdot (\sqrt{3})^2 = 3\pi(\text{cm}^2)$$

Do đó diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung BC và cung nhỏ BC là

$$S_{vp} = \frac{1}{3} \left(3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} \right) = 1,8(\text{cm}^2)$$

Bài toán 9. Xác định tâm và bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng a .

Lời giải



Ta có tam giác ABC đều.

Gọi O là trực tâm của tam giác đồng thời là giao điểm ba đường phân giác trong.

Vậy O là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC .

Ta có $\widehat{BAH} = \widehat{CAH} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Xét tam giác AHB vuông tại H có cạnh huyền $AB = a$, $\widehat{BAH} = 30^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH = AB \cdot \cos \widehat{BAH} = a \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

(Lưu ý: Có thể kết luận ngay $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ vì $\triangle ABC$ đều cạnh a).

Mặt khác tam giác ABC đều nên trục tâm O cũng là trọng tâm, suy ra

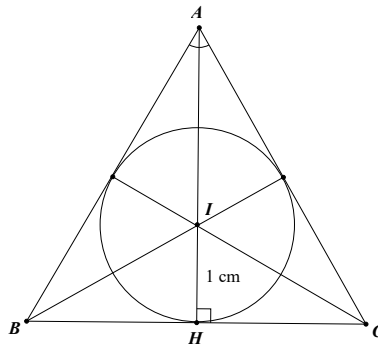
$$OH = \frac{1}{3} \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a bằng $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Nhận xét: Trong tam giác đều, tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp trùng nhau.

Bài toán 10. Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết rằng bán kính của (I) bằng 1 cm.

Lời giải



I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC nên là giao điểm của ba đường phân giác và I đồng thời là trọng tâm của tam giác đều ABC , khi đó AH là đường trung tuyến.

Ta có: $AI = 2IH = 2 \cdot 1 = 2(\text{cm})$

Suy ra $BI = CI = AI = 2(\text{cm})$.

Xét tam giác BHI vuông tại H , có cạnh huyền $BI = 2(\text{cm})$, $\widehat{IBH} = 30^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$BH = BI \cdot \cos \widehat{IBH} = 2 \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}(\text{cm}).$$

Suy ra $BC = 2.BH = 2.\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\text{cm})$.

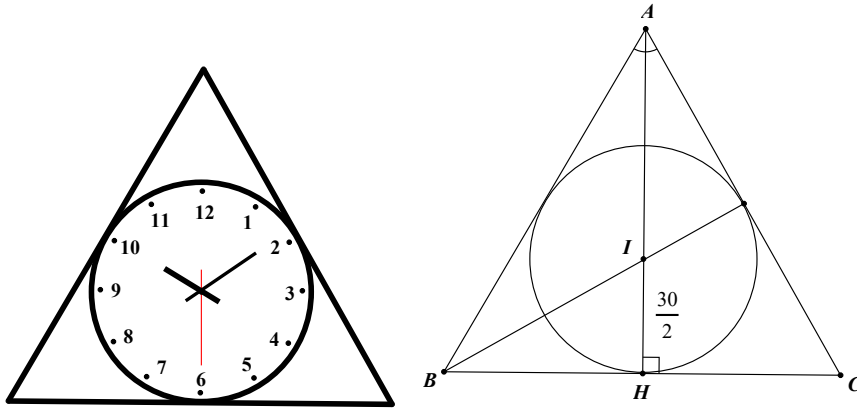
Độ dài các cạnh của tam giác đều ABC ngoại tiếp $(I, 1\text{cm})$ bằng $2\sqrt{3}\text{ cm}$.

II. Bài toán thực tế

Bài toán 11. Người ta muốn làm một khung gỗ hình tam giác đều để đặt vừa khít một chiếc đồng hồ hình tròn có đường kính 30cm (Hình vẽ). Hỏi độ dài các cạnh (phía bên trong) của khung gỗ phải bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn: Giải tương tự bài toán 10.

Lời giải



Ta có bán kính của hình tròn nội tiếp tam giác đều ABC là $\frac{30}{2} = 15(\text{cm})$.

Tam giác ABC đều nên giao điểm I của ba đường phân giác cũng là trực tâm và trọng tâm của tam giác hay AH là đường trung tuyến.

Xét tam giác BHI vuông tại H có cạnh huyền $BI = AI = 30\text{ cm}$ và $\widehat{HBI} = 30^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

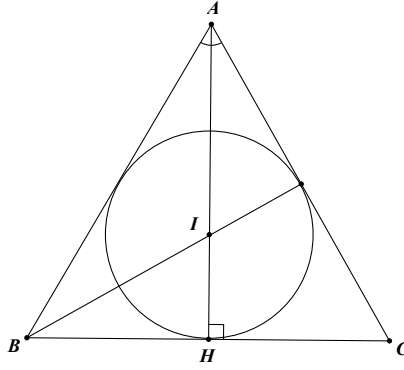
$$BH = BI.\cos \widehat{HBI} = 30.\cos 30^\circ = 15\sqrt{3}(\text{cm})$$

Suy ra $BC = 2.15\sqrt{3} = 30\sqrt{3}(\text{cm})$.

Vậy độ dài các cạnh (phía bên trong) của khung gỗ phải bằng $30\sqrt{3}\text{ cm}$.

Bài toán 12. Một mảnh vườn có dạng hình tam giác đều ABC cạnh 12m. Người ta muốn trồng hoa ở phần đất bên trong đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính diện tích phần đất trồng hoa đó.

Lời giải



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC .

Kẻ đường cao AH , khi đó tâm I của đường tròn nội tiếp (giao điểm của ba đường phân giác cũng là trọng tâm).

Ta có AH là đường trung tuyến suy ra H là trung điểm của BC hay

$$BH = CH = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6(\text{m}).$$

Xét tam giác BHI vuông tại H . Có $BH = 6\text{ m}$ và $\widehat{IBH} = 30^\circ$.

Theo định lý về hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$IH = BH \cdot \tan \widehat{IBH} = 6 \cdot \tan 30^\circ = 2\sqrt{3}(\text{m}).$$

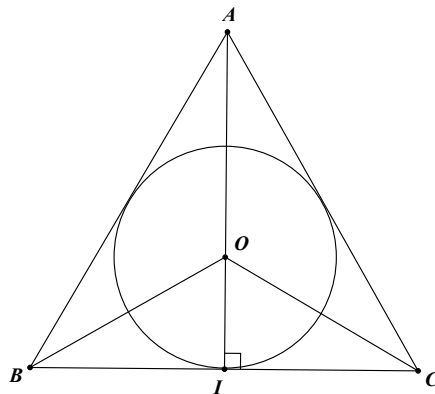
Vậy bán kính của phần đất trồng hoa là $2\sqrt{3}(\text{m})$.

Do đó diện tích phần đất trồng hoa là $S = \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 12\pi (\text{m}^2)$.

Bài toán 13. Ba vị trí A, B, C ở một công viên là ba đỉnh của một tam giác đều cạnh 15 m . Người ta cần chọn vị trí O cách đều ba vị trí A, B, C để làm một cột đèn. Tính khoảng cách từ vị trí O đến mỗi vị trí A, B, C .

Lời giải

(Xem hình vẽ)



Gọi O là vị trí cách đều ba vị trí A, B, C nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (giao điểm của ba đường trung trực).

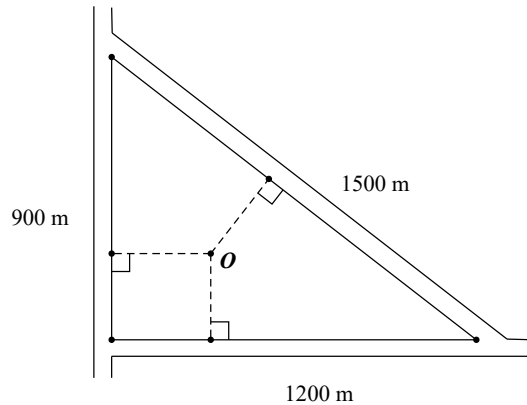
Do $\triangle ABC$ đều (gt) nên O đồng thời là trực tâm và trọng tâm của tam giác hay AH là đường cao của tam giác ABC đều cạnh 15m.

Suy ra $AH = \frac{15\sqrt{3}}{2}$ (m) vì AH đồng thời là trung tuyến của $\triangle ABC$ có trọng tâm O suy ra

$$OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{15\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ (m)}.$$

Vậy khoảng cách từ vị trí O đến mỗi vị trí A, B, C là $5\sqrt{3}$ (m).

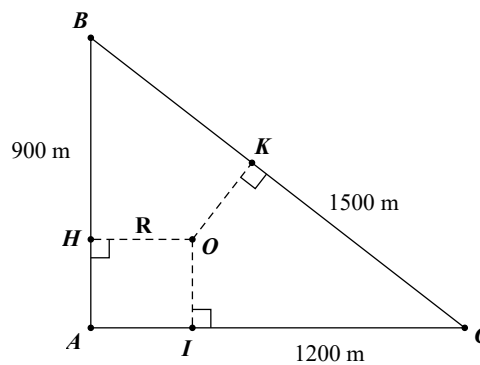
Bài toán 14. Người ta vẽ bản quy hoạch của một khu định cư được bao xung quanh bởi ba con đường thẳng lập thành một tam giác với độ dài các cạnh là 900m, 1200m và 1500m (Hình vẽ).



- Tính chu vi và diện tích của phần đất giới hạn bởi tam giác trên.
- Họ muốn xây dựng một khách sạn bên trong khu dân cư cách đều cả ba con đường đó. Hỏi khi đó khách sạn sẽ cách một con đường một khoảng là bao nhiêu?

Lời giải

(Xem hình vẽ)



- Tam giác ABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ($1500^2 = 900^2 + 1200^2$)

Theo định lý Pythagore đảo, tam giác ABC vuông tại A .

Phần đất giới hạn là tam giác vuông, gọi P là chu vi, ta có:

$$P = AB + AC + BC = 900 + 1200 + 1500 = 3600 \text{ (m)}$$

$$\text{Và diện tích } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 900 \cdot 1200 = 540000 \text{ (m}^2\text{)}.$$

b) Gọi O là nơi xây dựng khách sạn và khoảng cách từ khách sạn đến ba con đường là $OH = OI = OK = R$.

Ta có: $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$ (trong đó S_{AOB} , S_{AOC} , S_{BOC} lần lượt là diện tích các tam giác AOB , AOC , BOC).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}R.AB + \frac{1}{2}R.AC + \frac{1}{2}R.BC$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}R.(AB + AC + BC)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}R.P \text{ (} S_{ABC} \text{ là diện tích } \triangle ABC \text{ và } P \text{ là chu vi)}$$

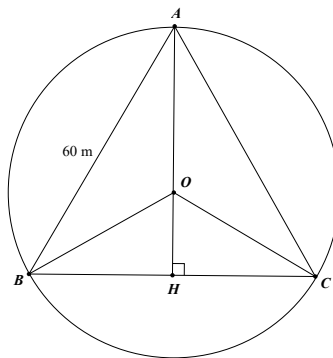
$$\text{Suy ra } R = \frac{2.S_{ABC}}{P} = \frac{2.540000}{3600} = 300 \text{ (m)}.$$

Khi đó khách sạn sẽ cách mỗi con đường 300 (m).

Bài toán 15. Trong một khu vui chơi có dạng hình tam giác đều với cạnh bằng 60 m, người ta muốn tìm một vị trí đặt bộ phát sóng wifi sao cho ở chỗ nào trong khu vui chơi đó đều có thể bắt được sóng. Biết rằng bộ phát sóng đó có tầm phát sóng tối đa là 50 m. Hỏi rằng có thể tìm được vị trí để đặt bộ phát sóng như vậy không?

Lời giải

(Xem hình vẽ)



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Kẻ đường cao AH . Vì $\triangle ABC$ đều nên đường cao đồng thời là đường trung tuyến nên H là trung điểm của BC , ta có:

$$HB = HC = \frac{BC}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ (m)}$$

Tam giác AHC vuông tại H . Theo định lý Pythagore ta có $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 60^2 + 30^2$

$$\text{Suy ra } AB = \sqrt{60^2 + 30^2} = 30\sqrt{3} \text{ (m)}.$$

$$\text{Ta có: } OA = \frac{2}{3}AH \text{ (tính chất trọng tâm)}$$

$$\text{Suy ra } OA = \frac{2}{3} \cdot 30\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \text{ (m)}.$$

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC cạnh 60 m là

$$OA = 20\sqrt{3} \approx 34,6 \text{ (m)} < 50 \text{ (m)}.$$

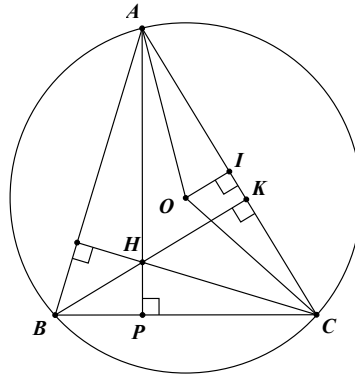
Vậy có thể đặt vị trí bộ phát sóng tại O .

III. Chứng minh

Bài toán 16. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Lời giải

(Xem hình vẽ)



Gọi OI là đường cao của tam giác AOC cân tại O , ta có OI đồng thời là đường phân giác của góc $\widehat{AOC}$ hay $\widehat{AOI} = \widehat{COI} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$.

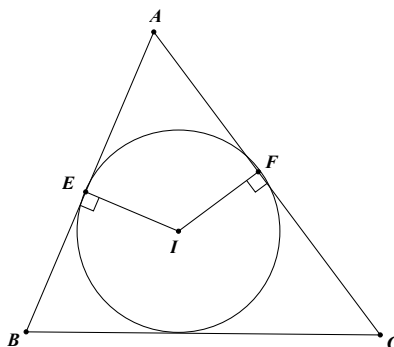
Xét đường tròn (O) ta có $\widehat{ABC}$ và $\widehat{AOC}$ lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC nên $\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AOC}}{2}$ hay $\widehat{ABC} = \widehat{AOI}$.

Hai tam giác APB và AIO đều vuông tại P và I mà $\widehat{ABP} = \widehat{AOI}$ (chứng minh trên)

Nên suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau).

Bài toán 17. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC với các tiếp điểm trên các cạnh AB, AC lần lượt là E, F . Chứng minh rằng $\widehat{EIF} + \widehat{BAC} = 180^\circ$.

Lời giải



Ta có E, F lần lượt là hai tiếp điểm trên các cạnh AB, AC (gt) suy ra $\widehat{AEI} = \widehat{AFI} = 90^\circ$.

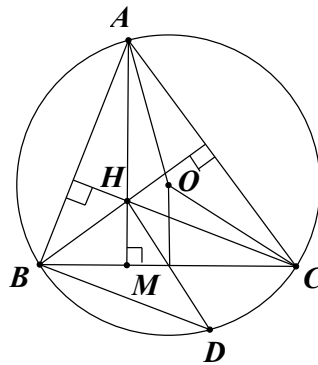
Xét tứ giác $AEIF$ có $\widehat{AEI} + \widehat{AFI} = 180^\circ$

Suy ra $\widehat{EIF} + \widehat{BAC} = 360^\circ - (\widehat{AEI} + \widehat{AFI}) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$. (đpcm)

Bài toán 18. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) đường kính $AD = 2R$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh:

- $DB \perp AB$ và $CD \perp AC$.
- Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.
- $AC^2 + BH^2 = 4R^2$.
- Ba điểm H, M, D thẳng hàng và $AH = 2OM$.

Lời giải



- Xét tam giác ABD , ta có: $OB = OA = OD (= R)$ hay $OB = AD$

Chứng tỏ $\triangle ABD$ vuông tại B

Hay $DB \perp AB$ (đpcm)

Chứng minh tương tự ta có $CD \perp AC$.

- Ta có $BH \parallel DC$ (cùng vuông góc với AC)

Tương tự $CH \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB)

Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành (Các cạnh đối song song)

- Ta có tam giác ACD vuông tại C (chứng minh trên)

$$AC^2 + DC^2 = AD^2 \text{ (định lý Pythagore)}$$

$$\text{Mà } DC = BH \text{ (cmt)} \quad AC^2 + BH^2 = AD^2 = (2R)^2 = 4R^2.$$

- Ta có M là trung điểm của BC (gt) mà tứ giác $BHCD$ là hình bình hành (cmt) nên đường chéo thứ hai HD phải qua trung điểm M hay ba điểm H, M, D thẳng hàng.

* Xét tam giác AHD có O là trung điểm của AD (gt)

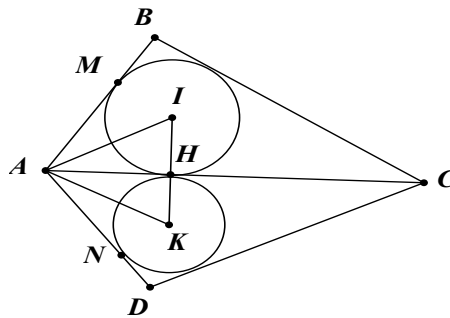
M là trung điểm của HD (cmt) nên OM là đường trung bình của tam giác AHD

$$\Rightarrow AH = 2.OM$$

Bài toán 19. Cho tứ giác $ABCD$ có các tam giác ABC và ADC lần lượt ngoại tiếp các đường tròn (I) và (K) sao cho hai đường tròn này tiếp xúc với đường thẳng AC tại điểm H thuộc đoạn thẳng AC . Giả sử đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AB tại M , đường tròn (K) tiếp xúc với cạnh AD tại N (Hình vẽ). Chứng minh:

- Ba điểm I, H, K thẳng hàng
- $AM = AN$
- $\widehat{IAK} = \frac{1}{2}\widehat{BAD}$

Lời giải



a) Đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AC tại điểm H (gt) $\Rightarrow IH \perp AC$.

Tương tự đường tròn (K) tiếp xúc với cạnh AC tại điểm H (gt) $\Rightarrow KH \perp AC$.

Suy ra ba điểm I, H, K thẳng hàng

b) Ta có: Đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh AB tại M hay AM là tiếp tuyến của đường tròn (I)

Lại có AH là tiếp tuyến của đường tròn (I) (cmt)

$AM = AH$ (*) (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Chứng minh tương tự, ta có $AH = AN$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow AM = AN$

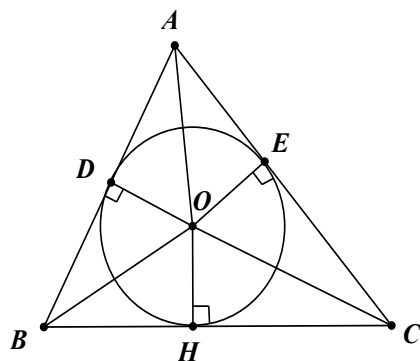
c) Ta có: $\widehat{IAK} = \widehat{IAH} + \widehat{HAK}$ mà $\widehat{IAH} = \frac{1}{2}\widehat{MAH}$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$\widehat{HAK} = \frac{1}{2}\widehat{HAN} \Rightarrow \widehat{IAK} = \frac{1}{2}\widehat{HAN} = \frac{1}{2}(\widehat{MAH} + \widehat{HAN}) = \frac{1}{2}\widehat{MAN} \text{ hay } = \frac{1}{2}\widehat{BAD} \text{ (đpcm)}$$

Bài toán 20. Cho tam giác ABC có diện tích S và ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$.

Chứng minh rằng $S = \frac{1}{2}r(BC + CA + AB)$

Lời giải



Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp $(I; r)$ với các cạnh AB, AC và BC của tam giác ABC .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= S_{AIB} + S_{AIC} + S_{BIC} \\ &= \frac{1}{2} ID \cdot AB + \frac{1}{2} IE \cdot AC + \frac{1}{2} IF \cdot BC \end{aligned}$$

$$\text{Mà } ID = IE = IF = r$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} r (BC + CA + AB) \text{ (đpcm).}$$

∞ HẾT ∞

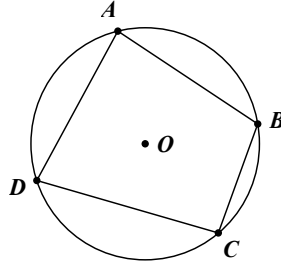
CHƯƠNG IX. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

BÀI 29. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Định nghĩa

Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (hoặc đơn giản là tứ giác nội tiếp) và đường tròn được gọi là ngoại tiếp tứ giác.



II. Tính chất

- Định lí: Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180°

III. Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông

Hình chữ nhật và hình vuông là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của chúng có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tính toán

Bài toán 1. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Tính số đo của các góc còn lại của tứ giác trong mỗi trường hợp sau:

a) $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 60^\circ$

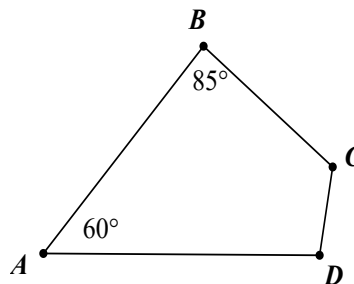
b) $\hat{A} = 70^\circ, \hat{B} = 90^\circ$

c) $\hat{A} = 100^\circ, \hat{B} = 60^\circ$

d) $\hat{A} = 100^\circ, \hat{B} = 80^\circ$

Lời giải

a) (Xem hình vẽ)



Ta có $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$

$$\text{Hay } 60^\circ + \hat{C} = 180^\circ$$

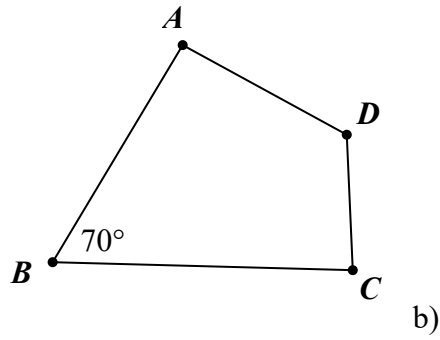
$$\Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\text{Tương tự: } \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{D} = 180^\circ - \hat{B}$$

$$= 180^\circ - 85^\circ$$

$$= 95^\circ$$



Ta có $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{C} &= 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - \hat{C} \\ &= 180^\circ - 90^\circ \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Tổng tời: } \hat{B} + \hat{D} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{D} &= 180^\circ - \hat{B} \\ &= 180^\circ - 70^\circ \\ &= 110^\circ\end{aligned}$$

c) Bạn tự vẽ hình

Ta có $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{C} &= 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - \hat{C} \\ &= 180^\circ - 100^\circ \\ &= 80^\circ\end{aligned}$$

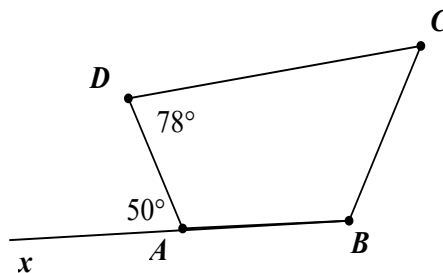
$$\begin{aligned}\text{Tổng tời: } \hat{B} + \hat{D} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{D} &= 180^\circ - \hat{B} \\ &= 180^\circ - 60^\circ \\ &= 120^\circ\end{aligned}$$

d) Đáp số: $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

$$\hat{B} = 180^\circ - \hat{D} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

Bài toán 2. Tính số đo các góc B và C của tứ giác ABCD trong hình vẽ. Biết tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn.

Lời giải



$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \widehat{BAD} &= 180^\circ - \widehat{DAx} \text{ (kề bù)} \\ &= 180^\circ - 50^\circ \\ &= 130^\circ\end{aligned}$$

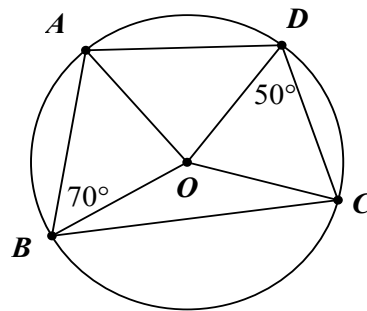
Ta có $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\begin{aligned}\widehat{A} + \widehat{C} &= 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} \\ &= 180^\circ - 130^\circ \\ &= 50^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Tổng tới: } \widehat{B} + \widehat{D} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \widehat{B} &= 180^\circ - \widehat{D} \\ &= 180^\circ - 78^\circ \\ &= 102^\circ\end{aligned}$$

Bài toán 3. Bức tranh treo tường có vẽ một tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O (hình vẽ). Cho biết $\widehat{ABC} = 70^\circ, \widehat{ODC} = 50^\circ$. Tìm góc AOD .

Lời giải



Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O)

$$\text{Nên } \widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{ADC} = \widehat{ADO} + \widehat{ODC}$$

$$\begin{aligned}\widehat{ADO} &= \widehat{ADC} - \widehat{ODC} \\ &= 110^\circ - 50^\circ \\ &= 60^\circ\end{aligned}$$

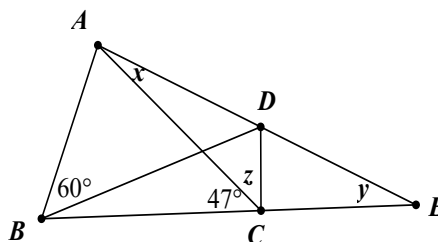
Tam giác AOD cân tại O có $\widehat{ADO} = 60^\circ$ (cmt) suy ra $\widehat{DAO} = 60^\circ$

$$\widehat{AOD} = 180^\circ - 2.60^\circ = 60^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{AOD} = 60^\circ$$

Bài toán 4. Trong hình vẽ $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Tính số đo các góc x, y, z .

Lời giải



$$\text{Ta có : } \widehat{ADC} + \widehat{CDE} = 180^\circ \text{ (kề bù)}$$

$$\begin{aligned}\widehat{ADC} &= 180^\circ - \widehat{CDE} \\ &= 180^\circ - 70^\circ \\ &= 110^\circ\end{aligned}$$

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$

$$\begin{aligned}\widehat{ABC} &= 180^\circ - \widehat{ADC} \\ &= 180^\circ - 110^\circ \\ &= 70^\circ\end{aligned}$$

$$\text{Mà } \widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC}$$

$$\begin{aligned}(\widehat{DBC} &= \widehat{ABC} - \widehat{ABD} \\ &= 70^\circ - 50^\circ \\ &= 20^\circ\end{aligned}$$

Bốn điểm A, B, C, D nằm trên đường tròn $\widehat{CAD} = \widehat{DBC} = 20^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD).

Vậy $x = 20^\circ$

Ta lại có $\widehat{ABD}$ và $\widehat{ACD}$ là hai góc nội tiếp cùng chắn cung AD

$$\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 50^\circ \text{ hay } z = 50^\circ.$$

$$\text{Ta có } \widehat{BCD} = \widehat{BCA} + \widehat{ACD} = 47^\circ + 50^\circ = 97^\circ$$

Mà $(\widehat{BCD} + \widehat{DCE} = 180^\circ \text{ (kề bù)})$

$$\widehat{DCE} = 180^\circ - \widehat{BCD} = 180^\circ - 97^\circ = 83^\circ$$

Xét tam giác DCE , ta có :

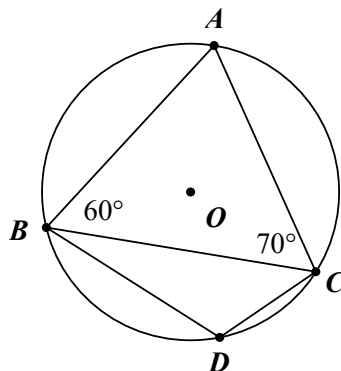
$$\widehat{DCE} + \widehat{CED} + \widehat{CDE} = 180^\circ \text{ hay } 83^\circ + 70^\circ + \widehat{CED} = 180^\circ$$

$$\widehat{CED} = 180^\circ - (83^\circ + 70^\circ) = 27^\circ$$

Vậy $y = 27^\circ$.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) thỏa mãn $\widehat{ABC} = 60^\circ, \widehat{ACB} = 70^\circ$. Giả sử D là điểm thuộc cung BC không chứa A . Tính số đo góc BDC .

Lời giải



Xét tam giác ABC , ta có:

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

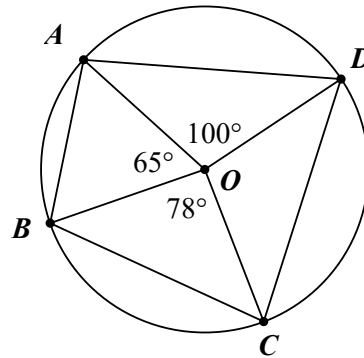
$$\begin{aligned}\widehat{BAC} &= 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) \\ &= 180^\circ - (60^\circ + 70^\circ) \\ &= 50^\circ\end{aligned}$$

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên: $\widehat{BDC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$

$$\widehat{BDC} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

Bài toán 6. Tính số đo các góc của tứ giác nội tiếp $ABCD$ trong hình vẽ

Lời giải



Tam giác AOB cân tại O

$$\widehat{AOB} = \widehat{OBA} = \frac{180^\circ - 65^\circ}{2} = 57,5^\circ$$

Tương tự tam giác BOC cân tại O

$$\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{180^\circ - 78^\circ}{2} = 51^\circ$$

$$\text{Do đó } \widehat{ABC} = \widehat{OBA} + \widehat{OBC} = 57,5^\circ + 51^\circ = 108,5^\circ$$

Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$

$$\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 108,5^\circ = 71,5^\circ$$

Lại có tam giác AOD cân tại O

$$\text{Nên } \widehat{OAD} = \widehat{ODA} = \frac{180^\circ - 106^\circ}{2} = 37^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{BAD} = \widehat{OAB} + \widehat{OAD} = 57,5^\circ + 37^\circ = 94,5^\circ$$

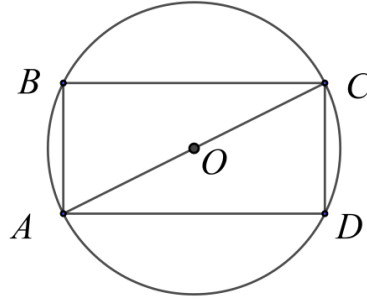
Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = 180^\circ$

$$\widehat{BAD} = 180^\circ - \widehat{BCD} = 180^\circ - 94,5^\circ = 85,5^\circ.$$

Bài toán 7. Tính diện tích của một hình chữ nhật, biết rằng hình chữ nhật đó có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2,5 cm

Hướng dẫn: Hình chữ nhật $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp có tâm là giao điểm hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

Lời giải



Ta có AC là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $AC = 2.2,5 = 5(\text{cm})$

Gọi chiều rộng hình chữ nhật là x thì chiều dài hình chữ nhật là $2x$

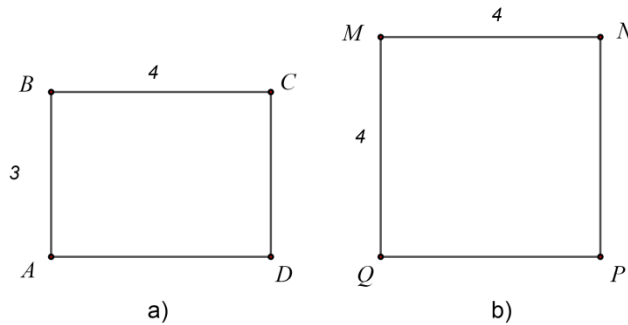
Xét tam giác ABC vuông tại B . Theo định lý Pythagore; ta có:

$$x^2 + (2x)^2 = 5^2 \Rightarrow 5x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}(\text{cm})$$

Vậy chiều rộng hình chữ nhật là $\sqrt{5}(\text{cm})$ và chiều dài là $2\sqrt{5}(\text{cm})$

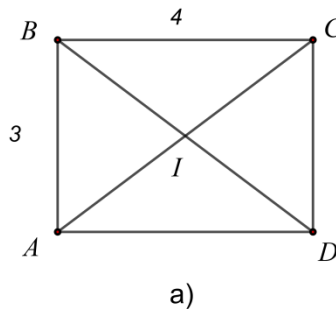
Do đó diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $\sqrt{5}.2\sqrt{5} = 10(\text{cm}^2)$

Bài toán 8. Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông trong hình vẽ.



Lời giải

(Xem hình vẽ a).



Gọi I là giao điểm của hai đường chéo $AC; BD$ của hình chữ nhật $ACBD$ nên I là trung điểm của AC .

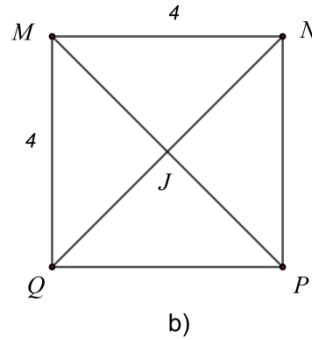
Tam giác ABC vuông tại B . Theo định lý Pythagore; ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Vậy đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật có tâm I (là trung điểm của AC) và bán kính

$$R = \frac{AC}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

(Xem hình vẽ b).



Gọi J là giao điểm của hai đường chéo hình vuông $MNPQ$ nên J là trung điểm của QN .

Tam giác QMN vuông tại M . Theo định lý Pythagore; ta có: $QN^2 = QM^2 + MN^2 = 4^2 + 4^2$

$$\Rightarrow QN = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

Vậy đường tròn ngoại tiếp hình vuông có tâm J (là trung điểm của QN) và bán kính

$$R = \frac{QN}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Tổng quát: Ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông cạnh a bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Bài toán 9. Cho đường tròn tâm O có bán kính $R=5\text{ cm}$

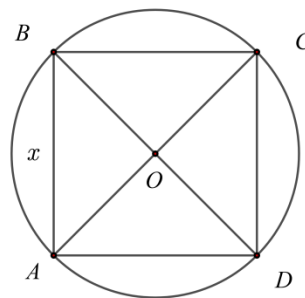
a) Tính độ dài cạnh của hình vuông nội tiếp trong (O) .

b) Một hình chữ nhật nội tiếp trong (O) có chu vi (O) . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đó

Hướng dẫn: Hình vuông và hình chữ nhật là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của chúng có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

Lời giải

a) (Xem hình vẽ).



Gọi hình vuông nội tiếp trong đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ là $ABCD$

Ta có : $AC = 2.R = 2.5 = 10(\text{cm})$

Gọi cạnh hình vuông là x . Theo định lý Pythagore, ta có:

$$x^2 + x^2 = AC^2$$

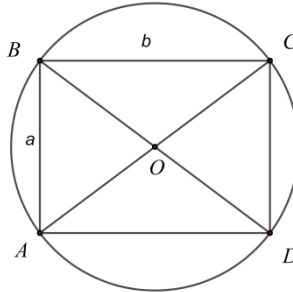
$$2x^2 = 10^2$$

$$x^2 = 50$$

$$x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Vậy cạnh hình vuông nội tiếp trong đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ bằng $5\sqrt{2}$

b) (Xem hình vẽ)



Gọi chiều dài a , chiều rộng b .

Ta có chu vi hình chữ nhật $2(a+b)=28$

Nửa chu vi $a+b=14$

Tam giác ABC vuông tại B . Theo định lý Pythagore; ta có:

$$a^2 + b^2 = AC^2$$

$$a^2 + b^2 = 10^2$$

$$a^2 + b^2 = 100$$

Theo bài ra, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} a+b=14 & (1) \\ a^2+b^2=100 & (2) \end{cases} \quad (a>b>0)$$

Từ (1) suy ra $b=14-a$ (*)

Thế (*) vào (2), ta có:

$$a^2 + (14-a)^2 = 100$$

$$a^2 + (196 - 28a + a^2) = 100$$

$$2a^2 - 28a + 196 - 100 = 0$$

$$a^2 - 14a + 48 = 0$$

$$a^2 - 8a - 6a + 48 = 0$$

$$a(a-8) - 6(a-8) = 0$$

$$(a-8)(a-6) = 0$$

$$a-8=0 \text{ hoặc } a-6=0$$

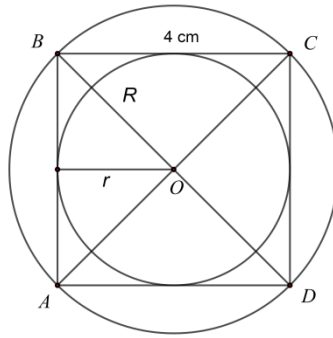
$$a=8 \Rightarrow b=14-8=6 \text{ (vì } a>b)$$

Vậy chiều dài của hình chữ nhật là 8 cm và chiều rộng là 6 cm.

Bài toán 10. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4 cm. Tính chu vi; diện tích của các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp hình vuông $ABCD$

Hướng dẫn: Cần tính bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp

Lời giải



Dễ thấy bán kính đường tròn nội tiếp $r = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (cm)}$

Chu vi đường tròn nội tiếp hình vuông $P_1 = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi \text{ (cm)}$

Diện tích đường tròn nội tiếp hình vuông $S_1 = \pi r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Hình vuông $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$ có $ABCD$ là đường kính.

Xét tam giác ABC vuông tại B . Theo định lý Pythagore; ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 4^2$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow R = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

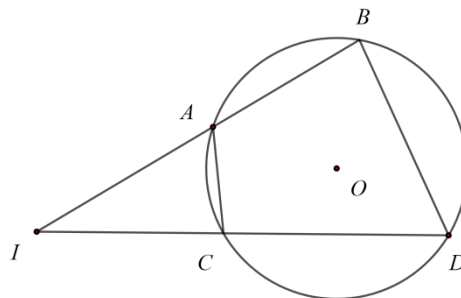
Chu vi đường tròn ngoại tiếp hình vuông $P_2 = 2\pi R = 2 \cdot \pi \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi \text{ (cm)}$

Diện tích đường tròn ngoại tiếp hình vuông $S_2 = \pi R^2 = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 = 8\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

II. Chứng minh

Bài toán 11. Cho điểm I nằm ngoài đường tròn (O) . Qua I kẻ hai đường thẳng lần lượt cắt (O) tại bốn điểm $A; B; C; D$ sao cho A nằm giữa B và I ; C nằm giữa D và I . Chứng minh rằng $\widehat{IBD} = \widehat{ICA}$; $\widehat{IAC} = \widehat{IDB}$ và $IA \cdot IB = IC \cdot ID$

Lời giải



Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) nên $\widehat{IBD} + \widehat{ACD} = 180^\circ$

Mà $\widehat{ICA} + \widehat{ACD} = 180^\circ$ (kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{IBD} = \widehat{ICA}.$$

Chứng minh tương tự ta có : $\widehat{IDB} = \widehat{IAC}$

Xét $\triangle IAC$ và $\triangle IDB$ có:

$$\widehat{IDB} = \widehat{IAC} \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{IBD} = \widehat{ICA} \text{ (cmt)}$$

Do đó $\triangle IAC \sim \triangle IDB$ (g-g)

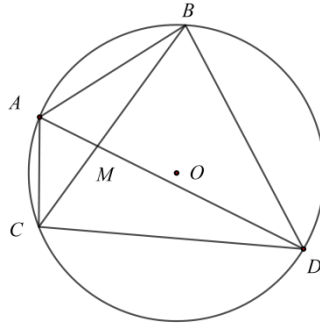
$$\Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{ID}{IB} \Rightarrow IA \cdot IB = IC \cdot ID$$

Bài toán 12. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.

b) AC cắt BD tại M . Chứng minh rằng: $MA \cdot MC = MB \cdot MD$.

Lời giải



a) Ta có : Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O)

Do đó $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BC của đường tròn (O)).

b) Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MDC$ có:

$$\widehat{AMB} = \widehat{CMD} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{BDC} \text{ (cm ý a)}$$

Vậy $\triangle MAB \sim \triangle MDC$ (g-g)

$$\text{Suy ra } \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} \text{ Hay } MA \cdot MC = MB \cdot MD \text{ (đpcm)}$$

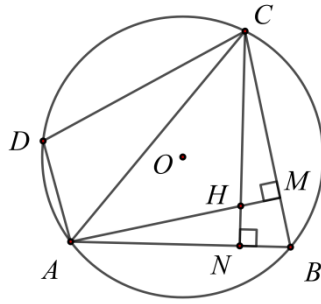
Bài toán 13. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có tam giác ABC là tam giác nhọn. Hai đường cao AM và CN của tam giác ABC cắt nhau tại H (Hình vẽ). Chứng minh:

$$\text{a) } \widehat{MHN} + \widehat{ABC} = 180^\circ;$$

$$\text{b) } \widehat{AHC} = \widehat{ADC}$$

$$\text{c) } \widehat{ADC} = \widehat{BAM} + 90^\circ$$

Lời giải



a) Xét tứ giác $HMBN$ có:

$$\widehat{HMN} + \widehat{HNB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{MHN} + \widehat{ABC} = 180^\circ \quad (1)$$

b) Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MHN} = \widehat{ADC}$ mà $\widehat{MHN} = \widehat{AHC}$ (đối đỉnh)

$$\text{Do đó } \widehat{AHC} = \widehat{ADC}$$

c) Xét tam giác AMB vuông tại M , ta có:

$$\widehat{MAB} + \widehat{ABC} + 90^\circ = 180^\circ \quad (\text{Định lý tổng ba góc trong tam giác})$$

$$\Rightarrow \widehat{MAB} + 90^\circ = 180^\circ - \widehat{ABC} \quad (*)$$

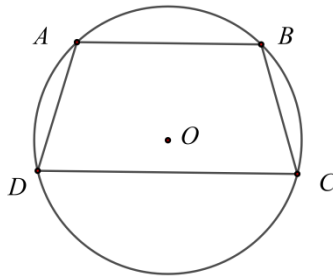
Lại có $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ (Do tứ giác $ABCD$ nội tiếp)

$$\Rightarrow \widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ABC} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{BAM} + 90^\circ$

Bài toán 14. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) nội tiếp đường tròn. Chứng minh hình thang $ABCD$ là hình thang cân

Lời giải



Xét hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ nên $\widehat{DAB} + \widehat{ADC} = 180^\circ \quad (1)$ (cặp góc trong cùng phía)

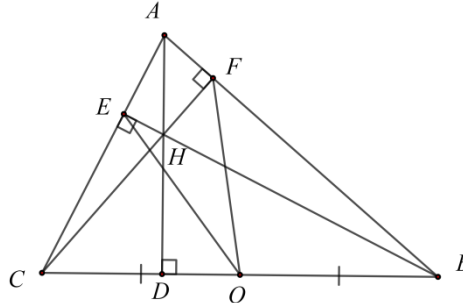
Vì $ABCD$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180^\circ \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{DCB}$

Xét hình thang $ABCD$ có $\widehat{ADC} = \widehat{DCB}$ nên hình thang $ABCD$ là hình thang cân (hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau).

Bài toán 15. Cho tam giác ABC có các đường cao $AD; BE; CF$. Chứng minh rằng các tứ giác $BCEF$; $CAFD$; $ABDE$ là những tứ giác nội tiếp.

Lời giải



Gọi O là trung điểm BC .

Xét tam giác BCF vuông tại F (gt) có FO là đường trung tuyến nên $FO = \frac{BC}{2}$ hay $FO = CO = BO$.

Chúng tỏ $B; F; C$ thuộc đường tròn (O)

Chứng minh tương tự ta cũng có $EO = CO = BO$ nên ba điểm $B; E; C$ thuộc đường tròn (O)

Do đó bốn điểm $B; F; C; E$ thuộc đường tròn (O) hay tứ giác $BCEF$ nội tiếp

Hai trường hợp còn lại chứng minh tương tự

Bài toán 16. Cho tam giác nhọn ABC có $AD; BE; CF$ là đường cao và H là trực tâm. Chứng minh rằng

a) Tứ giác $AEHF$; $BDHF$; $CDHF$ là các tứ giác nội tiếp.

b) DA là đường phân giác của góc FDE .

Lời giải

a) Ta có $\widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 180^\circ$

Do đó tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự, ta có các tứ giác $BDHF$ và $CDHF$ nội tiếp.

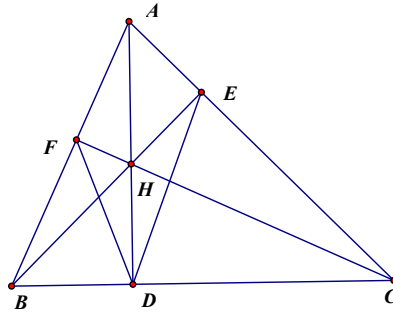
b) Xét tứ giác $BDHF$ nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{FDH} = \widehat{FBH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung FH)

Tương tự với tứ giác nội tiếp $CDHE$, ta có $\widehat{HDE} = \widehat{HCE}$

mà $\widehat{FBH} = \widehat{HCE}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$)

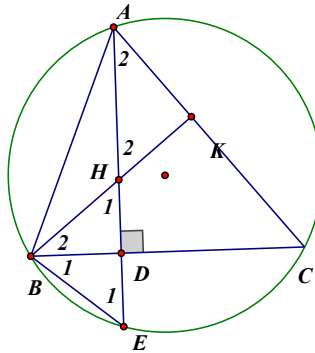
$\Rightarrow \widehat{FDH} = \widehat{HDE}$, chứng tỏ AD là đường phân giác của góc FDE



Bài toán 17. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) , đường cao AD cắt đường tròn (O) tại E . Trên AD lấy H sao cho D là trung điểm của EH , BH cắt AC tại K . Chứng minh tứ giác $HKCD$ nội tiếp.

Hướng dẫn: Ta đưa về câu a, bài toán 16 bằng cách chứng minh $\widehat{BKC} = 90^\circ$.

Lời giải



Dễ thấy $\triangle BDE = \triangle BDH$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ và $\widehat{E_1} = \widehat{H_1}$.

$\widehat{H_1} = \widehat{H_2}$ (đối đỉnh)

$\widehat{B_1} = \widehat{A_2}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EC)

mà $\widehat{B_1} + \widehat{E_1} = 90^\circ$ (do $\widehat{BDE} = 90^\circ$ (gt))

$\Rightarrow \widehat{A_2} + \widehat{H_2} = 90^\circ$

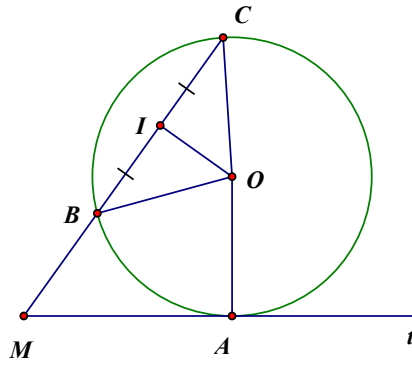
Trong $\triangle AHK \Rightarrow \widehat{AKH} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{HKC} = 90^\circ$

Ta có $\widehat{HKC} + \widehat{HDC} = 180^\circ$

Do tứ giác $HKCD$ nội tiếp

Bài toán 18. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , vẽ cát tuyến MBC và tiếp tuyến Mt tiếp xúc với (O) tại A . Gọi I là trung điểm của dây BC . Chứng minh $AMIO$ là một tứ giác nội tiếp.



Lời giải

Để thấy $\triangle BOC$ cân tại O , có OI là trung tuyến (gt) nên OI đồng thời là đường cao, nên $OI \perp BC$.

Mặt khác tiếp tuyến Mt tiếp xúc với (O) tại A nên $OA \perp Mt$.

Xét tứ giác $AMIO$ có $\widehat{MAO} + \widehat{MIO} = 180^\circ$. Nên $AMIO$ là một tứ giác nội tiếp.

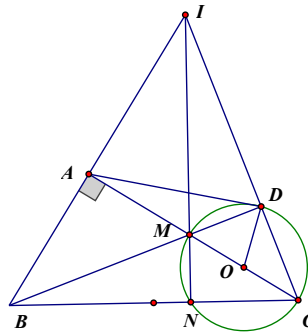
Bài toán 19. Cho tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A . Lấy điểm M bất kì trên đoạn AC , đường tròn đường kính CM cắt hai đường thẳng BM và BC lần lượt tại D và N . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

b) Các đường thẳng AB, MN, CD cùng đi qua một điểm.

Hướng dẫn: câu b cho hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm, chứng minh đường thứ ba đi qua điểm đó.

Lời giải



a) Gọi O là tâm đường tròn đường kính CM .

Ta có $DO = MO = CO$ hay $DO = \frac{MC}{2}$.

Chứng tỏ $\triangle MDC$ là tam giác vuông tại D .

Xét tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAM} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ (cmt) nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn đường kính BC hay tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

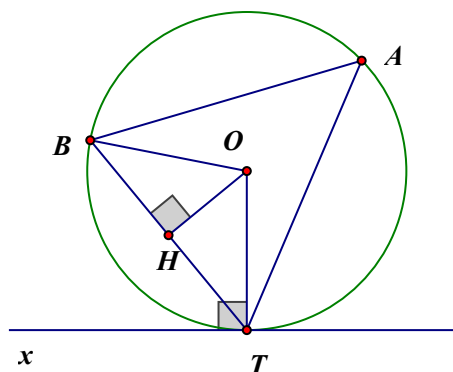
b) Gọi giao điểm của hai đường thẳng AB và CD là I , ta có M là trực tâm của $\triangle BIC$ nên IM là đường cao thứ ba $\Rightarrow IM \perp BC$.

$\Rightarrow IM$ và IN phải trùng nhau hay ba điểm I, M, N thẳng hàng.

Vậy các đường thẳng AB, MN, CD cùng đi qua một điểm I .

Bài toán 20. Trong một đường tròn. Chứng minh rằng góc giữa tiếp tuyến một dây và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

Lời giải



Kẻ $OH \perp TB$. Tam giác BOT cân tại O nên đường cao OH đồng thời là đường phân giác
hay $\widehat{BOH} = \widehat{HOT} = \frac{1}{2} \widehat{BOT}$. Lại có $\widehat{BAT} = \frac{1}{2} \widehat{BOT}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng
chắn một cung)

$$\Rightarrow \widehat{HOT} = \widehat{BAT} \quad (1)$$

ΔOHT vuông tại H , ta có $\widehat{HOT} + \widehat{OTB} = 90^\circ$

Lại có $\widehat{OTB} + \widehat{BTx} = 90^\circ$ (do Tx là tiếp tuyến)

$$\Rightarrow \widehat{HOT} = \widehat{BTx} \quad (2)$$

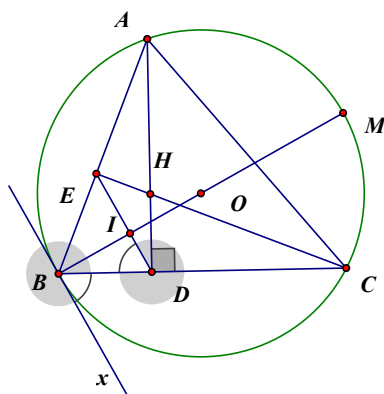
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BAT} = \widehat{BTx}$ ($\widehat{BTx}$ là góc giữa tiếp tuyến một dây và một dây chắn cung BT , $\widehat{BAT}$ là góc nội tiếp chắn cung BT)

Kết luận: Trong một đường tròn, góc giữa tiếp tuyến một dây và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

Ghi chú: Kết luận của bài toán 20 này sẽ dùng để chứng minh cho các bài toán khác và chúng ta xem là một định lí trong hình học.

Bài toán 21. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) , các đường cao AD và CE cắt nhau tại H . BO cắt DE tại I và cắt đường tròn (O) tại M . Chứng minh rằng tứ giác $DIMC$ nội tiếp.

Hướng dẫn: Dùng kết quả của câu a, bài toán 16 và bài toán 20.



Lời giải

Ta có $\widehat{AEC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ (gt) nên tứ giác $AEDC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EDC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$

$$\text{Mà } \widehat{EDC} + \widehat{EDB} = 180^\circ \text{ (kề bù)} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDE} \quad (1)$$

Kẻ tiếp tuyến Bx với đường tròn (O) ta có $\widehat{CBx} = \widehat{BAC}$ (2) (góc giữa tiếp tuyến một dây và một dây chắn cung và góc nội tiếp chắn cung BC)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{CBx} \Rightarrow Bx \parallel ED$ (cặp góc so le trong bằng nhau)

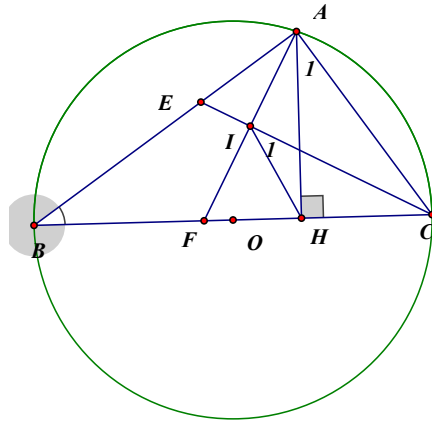
mà $Bx \perp OB$ (tính chất tiếp tuyến)

$$\Rightarrow DE \perp OB \text{ hay } \widehat{DIM} = 90^\circ$$

Dễ thấy $\widehat{BCM} = 90^\circ$ (do BM là đường kính) $\Rightarrow \widehat{DIM} + \widehat{BCM} = 180^\circ$

Chứng tỏ tứ giác $DIMC$ nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180°)

Bài toán 22. Cho $\triangle ABC$ ($AB > AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính BC . Vẽ đường cao AH của tam giác. Trên cạnh BC lấy F ($F \neq O$) sao cho $CF = CA$. Vẽ $CI \perp AF$ tại I và CI cắt cạnh AB tại E . Chứng minh rằng tứ giác $AIHC$ và $BEIH$ nội tiếp.



Lời giải

Dễ thấy tứ giác $AIHC$ nội tiếp ($\widehat{AIC} = \widehat{AHC} = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{I_1} \quad (1) \text{ (góc nội tiếp chắn cung } HC \text{)}$$

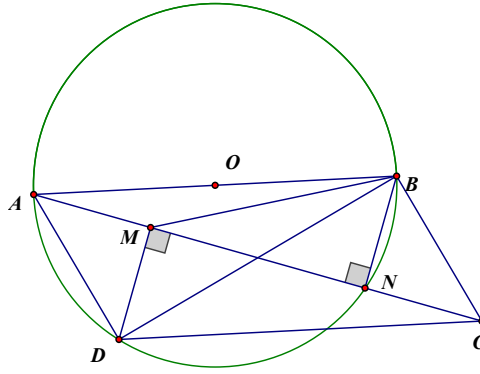
Lại có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (BC là đường kính) hay $\widehat{BAH} + \widehat{A_1} = 90^\circ$

$$\text{mà } \widehat{BAH} + \widehat{B} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{I_1}$ mà $\widehat{I_1} + \widehat{EIH} = 180^\circ$ (kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{EIH} = 180^\circ. \text{ Chứng tỏ tứ giác } BEIH \text{ nội tiếp}$$

Bài toán 23. Cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh D nằm trên đường tròn đường kính AB . Kẻ DM và BN cùng vuông góc với đường chéo AC . Chứng minh tứ giác $CBMD$ nội tiếp.



Lời giải

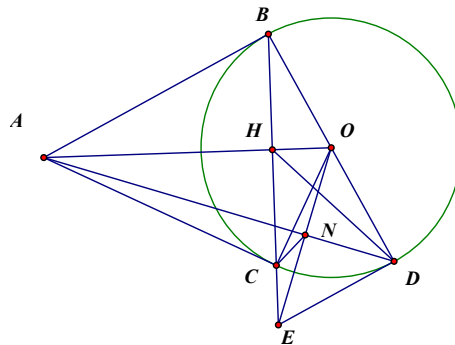
Nối B với D , ta có $\triangle ADB$ vuông tại D (AB là đường kính) hay $AD \perp BD$.

mà $AD \parallel BC$ (gt) $\Rightarrow BD \perp BC \Rightarrow \widehat{DBC} = 90^\circ$ hay $\widehat{DBC} = \widehat{DMC} = 90^\circ$.

Hai đỉnh M, B cùng nhìn DC dưới hai góc bằng nhau cùng bằng 90° nên tứ giác $CBMD$ nội tiếp.

Bài toán 24. Từ điểm A bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là tiếp điểm). Vẽ đường kính BD của đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại D của (O) cắt đường thẳng BC ở E , OE cắt AD ở N . Chứng minh tứ giác $AONC$ nội tiếp.

Lời giải



Gọi H là giao điểm của AO và BC , ta có $OA = OC = (R)$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên OA là đường trung trực của đoạn BC hay $OA \perp BC$ tại H . Xét $\triangle ACO$ vuông tại C (tính chất tiếp tuyến) và $\triangle CHO$ vuông tại H (cmt) có $\widehat{OAC}$ chung

$$\Rightarrow \triangle ACO \sim \triangle CHO (g - g) \Rightarrow \frac{OC}{OH} = \frac{OA}{OC} \Rightarrow OC^2 = OH.OA$$

$$\text{Mà } OD = OC (= R) \Rightarrow OD^2 = OH.OA \quad (1)$$

Xét $\triangle AOD$ và $\triangle DOH$, có $\widehat{AOD}$ chung và (1)

$$\Rightarrow \triangle AOD \sim \triangle DOH (c - g - c) \Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{ODH} \quad (2)$$

Lại có tứ giác $OHED$ nội tiếp ($\widehat{OHE} + \widehat{ODE} = 180^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{ODH} = \widehat{OEH} \quad (3) \quad (\text{góc nội tiếp cùng chắn cung } HO)$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{OEH} \text{ mà } \widehat{OEH} + \widehat{EOH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OAD} + \widehat{EOH} = 90^\circ.$$

Xét $\triangle AON$, ta có $\widehat{ANO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$

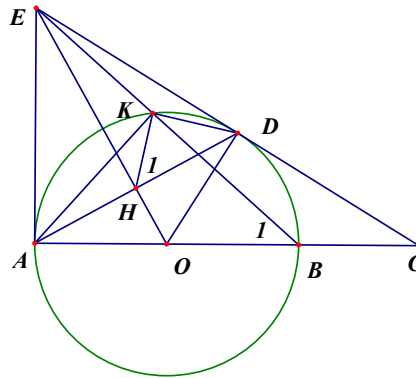
Do đó tứ giác $AONC$ nội tiếp

Bài toán 25. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên tia đối của tia BA lấy điểm C (C không trùng với B). Kẻ tiếp tuyến CD với đường tròn (O) (D là tiếp điểm). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng CD tại E . Gọi H là giao điểm của AD và OE , K là giao điểm của BE và đường tròn (O) (K không trùng với B).

a) Chứng minh: $AE^2 = AK.EB$

b) Chứng minh: tứ giác $BOHK$ nội tiếp.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{AKB} = 90^\circ$ (vì AB là đường kính) $\Rightarrow \triangle AKE$ vuông tại K .

Lại có $\triangle ABE$ vuông tại A (tính chất tiếp tuyến).

Xét $\triangle AKE$ và $\triangle EAB$, có $\widehat{AEK}$ chung

$\Rightarrow \triangle AKE \sim \triangle EAB (g - g)$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EK} = \frac{EB}{AE} \Rightarrow AE^2 = EK.EB \quad (1) \quad (\text{đpcm})$$

b) Dễ thấy EO là đường trung trực của AD hay $EO \perp AD$ tại H . Xét $\triangle EHA$ và $\triangle EAO$ có: $\widehat{EHA} = \widehat{EAO} = 90^\circ$; $\widehat{AEH}$ chung. Do đó $\triangle EHA \sim \triangle EAO (g - g)$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EH} = \frac{EO}{AE} \Rightarrow AE^2 = EH.EO \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EK.EB = EH.EO$

$\Rightarrow \triangle EHK \sim \triangle EBO (c - g - c)$

$\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{B_1}$ mà $\widehat{H_1} + \widehat{KHO} = 180^\circ$ (kề bù)

$\widehat{B_1} + \widehat{KHO} = 180^\circ$

Chứng tỏ tứ giác $BOHK$ nội tiếp

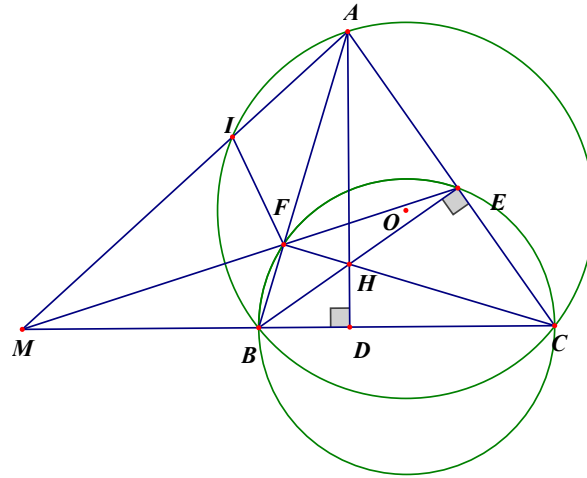
Nhận xét: Trong bài toán 6 có cát tuyến qua E trong đó có cát tuyến đi qua tâm của đường tròn (O) . Nếu cả hai cùng không đi qua tâm (O) ta có bài toán phức tạp hơn.

Bài toán 26. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) ba đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh tứ giác $AFHE$ nội tiếp. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AFHE$.

b) Gọi M là giao điểm của EF và CB và AM cắt đường tròn (O) tại I . Chứng minh tứ giác $AEFI$ nội tiếp.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^\circ$

Do đó tứ giác $AFHE$ nội tiếp đường tròn tâm là trung điểm của AH và đường kính là AH .

b) Ta có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow BFEC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MFB} = \widehat{MCE}$
 $\Rightarrow \Delta MFB \sim \Delta MCE$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{MF}{MC} = \frac{MB}{ME} \Rightarrow MF \cdot ME = MC \cdot MB \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có : $MC \cdot MB = MI \cdot MA$ (2) (vì 4 điểm A, I, B, C thuộc (O))

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MF \cdot ME = MI \cdot MA$

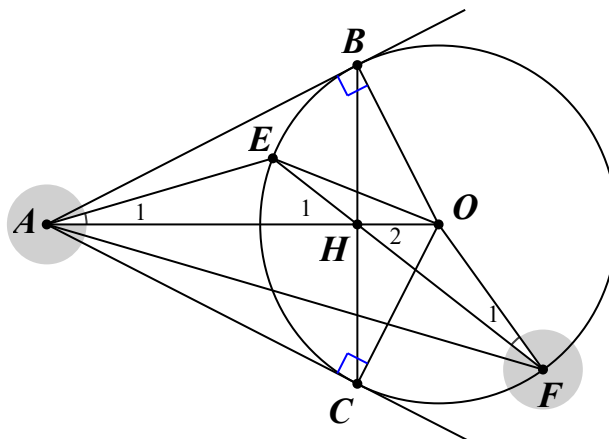
$$\Rightarrow \Delta MIF \sim \Delta MEA$$
 (c - g - c) $\Rightarrow \widehat{MIF} = \widehat{MEA}$

Vậy tứ giác $AEFI$ nội tiếp

Bài toán 27. Từ điểm A bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC , EF là một dây cung đi qua H . Chứng minh tứ giác $AEOF$ nội tiếp.

Lời giải

Lời giải



Dễ thấy OA là đường trung trực của BC hay $OA \perp BC$ tại H .

Ta có $\triangle ABO$ vuông tại B (tính chất tiếp tuyến)

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle BHO$ có:

$\widehat{AHB} = \widehat{BHO} = 90^\circ, \widehat{ABH} = \widehat{BOH}$ (góc giữa tiếp tuyến một dây và góc ở tâm cùng chắn một cung BC).

Do đó $\triangle AHB \sim \triangle BHO$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{HB}{HO} \Rightarrow HB^2 = HO \cdot HA$$

Mà $HB = HC$ nên $HO \cdot HA = HB \cdot HC$ (1)

Dễ thấy $\triangle EHB \sim \triangle CHF$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{HB}{HE} = \frac{HF}{HC} \Rightarrow HB \cdot HC = HE \cdot HF$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow HO \cdot HA = HE \cdot HF$

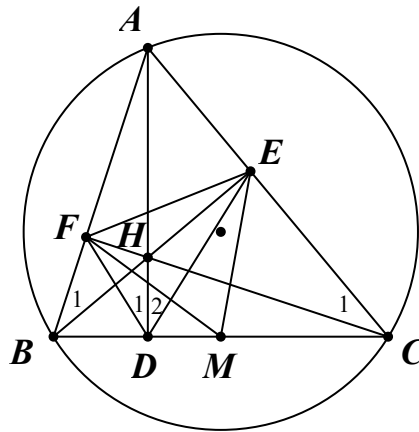
Xét $\triangle HEA$ và $\triangle FOH$ có $\widehat{H_1} = \widehat{H_2}$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \triangle FOH \sim \triangle HEA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{F_1}.$$

Hai đỉnh A và D nhìn E, O dưới một góc bằng nhau nên tứ giác $ADEO$ nội tiếp.

Bài toán 28. Cho tam giác có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi H là giao điểm của ba đường cao AD, BE, CF . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh tứ giác $EFDM$ nội tiếp.

Lời giải



Dễ thấy các tứ giác $AFHE, AFDC$ nội tiếp:

Tứ giác $AFHE$ có: $\widehat{BAD} = \widehat{BEF}$ (cùng chắn cung FH) (1)

Lại có M là trung điểm BC ; $\triangle BEC$ vuông có trung tuyến ứng với cạnh huyền EM

$$\Rightarrow \triangle BME \text{ cân} \Rightarrow \widehat{BEM} = \widehat{EBC}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{FEM}$

Lại có tứ giác $AFDC$ nội tiếp nên $\widehat{BAC} = \widehat{FDB}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ tứ giác $FEDM$ nội tiếp.

Cách khác:

Ta có $\widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 180^\circ.$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự ta có tứ giác $BFHD$ và $CEHD$.

Cũng là những tứ giác nội tiếp lại có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ (gt) nên $BFEC$ nội tiếp.

Xét đường tròn tâm M bán kính $\frac{BC}{2}$ đi qua 4 điểm B, F, E, C ta có $2\widehat{B_1} = \widehat{FME}$ (1) (góc nội tiếp và góc ở tâm) và $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EF)

Tương tự xét đường tròn đi qua 4 điểm B, F, H, D ta có $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung FH).

Tương tự với đường tròn đi qua 4 điểm C, E, H, D , ta có $\widehat{C_1} = \widehat{D_2}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HE).

$$\Rightarrow \widehat{FDE} = 2\widehat{B_1} \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{FME} = \widehat{FDE}$. Hai đỉnh M và D cùng nhìn hai đỉnh E, F còn lại dưới 1 góc bằng nhau nên tứ giác $EFDM$ nội tiếp.

Nhận xét:

* Bài toán trên đây là bài toán thu hẹp của bài toán đường tròn Ôle hay vòng tròn 9 điểm mà chúng ta đã có dịp làm quen trong §3. GÓC NỘI TIẾP, ở đây trong 4 đỉnh của tứ giác đã có 3 đỉnh là chân 3 đường cao và 1 đỉnh là trung điểm của một cạnh của tam giác, trong trường hợp này nếu ta đưa về cách giải của bài toán "Đường tròn Ô le" thì có phần phức tạp hơn.

* Mặt khác: Nếu chúng ta kẻ đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm và cắt đường thẳng BC thì ta lại có một tứ giác nội tiếp khác mà hai đỉnh vẫn là một chân đường cao với trung điểm và hai đỉnh kia là giao của đường thẳng EF với đường tròn (O) . Chúng ta hãy đưa về bài toán sau.

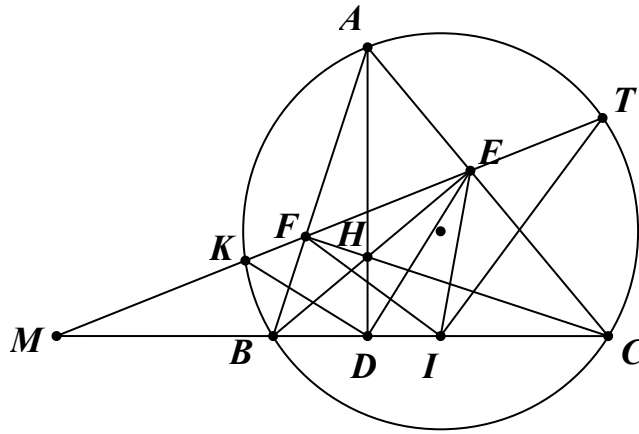
Bài toán 29. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh rằng: Tứ giác $BFEC$ nội tiếp, xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$.

b) Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại M và cắt đường tròn (O) tại K và T (K nằm giữa M và T). Chứng minh rằng: $MK.MT = ME.MF$.

c) Chứng minh tứ giác $KTID$ nội tiếp.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn tâm I là trung điểm của BC và bán kính $\frac{BC}{2}$.

b) Xét đường tròn (I) ta có $\widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung FB).

$$\Rightarrow \triangle MEB \sim \triangle MCF \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{ME}{MC} = \frac{MB}{MF} \Rightarrow ME \cdot MF = MB \cdot MC$$

Chứng minh tương tự với đường tròn (O) ta có: $MB \cdot MC = MK \cdot MT$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow MK \cdot MT = ME \cdot MF$$

c) Dễ thấy tứ giác $HECD$ nội tiếp ($\widehat{HEC} + \widehat{HDC} = 180^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{HED} = \widehat{HCD} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } HD \text{)}.$$

Lại có $BFEC$ nội tiếp (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{HCD} = \widehat{FEB} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } FB \text{)}.$$

$$\Rightarrow \widehat{HED} = \widehat{FEB} (= \widehat{HCD})$$

Lại có $\widehat{BIF} = 2\widehat{FCB}$ (góc ở tâm đường tròn (I) và góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

$$\Rightarrow \widehat{BIF} = \widehat{MED} \Rightarrow \triangle MIF \sim \triangle MED \text{ (g.g.)}$$

$$\Rightarrow \frac{MI}{ME} = \frac{MF}{MD} \Rightarrow MI \cdot MD = ME \cdot MF$$

$$\text{Từ (2), (4)} \Rightarrow MI \cdot MD = MK \cdot MT$$

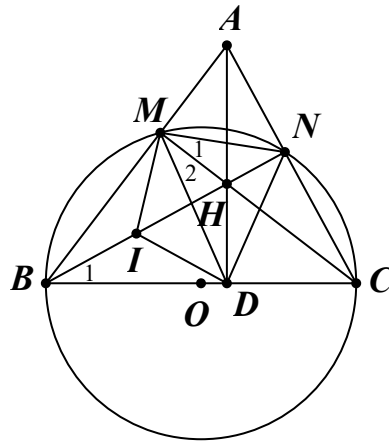
Do đó $\triangle MDK \sim \triangle MTI$ (c.g.c).

$$\Rightarrow \widehat{MDK} = \widehat{MTI} \Rightarrow \text{Tứ giác } KTID \text{ nội tiếp.}$$

Nhận xét: Cũng nói về đường tròn O le ta hãy xét bài toán tương tự sau, trong đó 3 điểm là chân ba đường cao và điểm còn lại là trung điểm của đoạn thẳng nối trực tâm đến đỉnh.

Bài toán 30. Cho tam giác ABC nhọn ($AB > AC$), đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB, AC tại M và N , CM cắt BN tại H , AH cắt BC tại D . Gọi I là trung điểm của HB . Chứng minh tứ giác $MNDI$ nội tiếp.

Lời giải



Dễ thấy các tứ giác sau đây nội tiếp $BMHO, BMNC$.

$$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{M_1} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } NC \text{)}.$$

$$\text{Tương tự } \widehat{B_2} = \widehat{M_2} \text{ (chắn cung } HD \text{)}$$

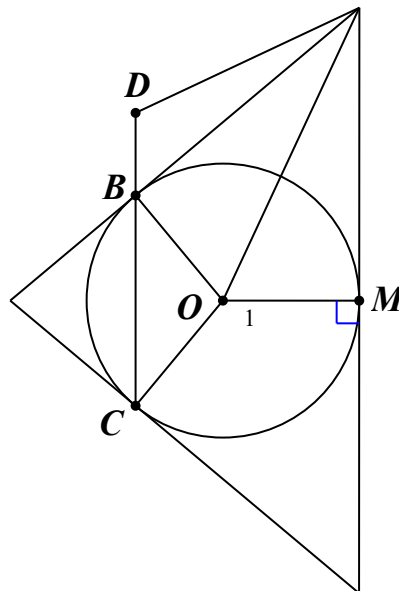
$$I \text{ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác } BMHD \Rightarrow \widehat{HID} = 2\widehat{B_1} \text{ (góc nội tiếp và góc ở tâm).}$$

$$\text{Mà } \widehat{NMD} = \widehat{M_1} + \widehat{M_2} \text{ mà } \widehat{M_1} = \widehat{M_2} = \widehat{B_1} \Rightarrow \widehat{HID} = \widehat{NMD}$$

Hai đỉnh M, I cùng nhìn N, D dưới 1 góc bằng nhau nên tứ giác $MNDI$ nội tiếp.

Bài toán 31. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B, C là các tiếp điểm). Trên tia đối của tia BC lấy D . Gọi E là giao điểm của DO và AC . Qua E kẻ tiếp tuyến thứ hai, tiếp tuyến này cắt đường thẳng AB ở K . Chứng minh rằng 4 điểm B, D, K, O cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



Gọi M là điểm tiếp xúc của KE với (O) ta có $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $\widehat{MBC} = \widehat{M_1}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp) mà $\widehat{MBC} + \widehat{MBD} = 180^\circ$ (kề bù).

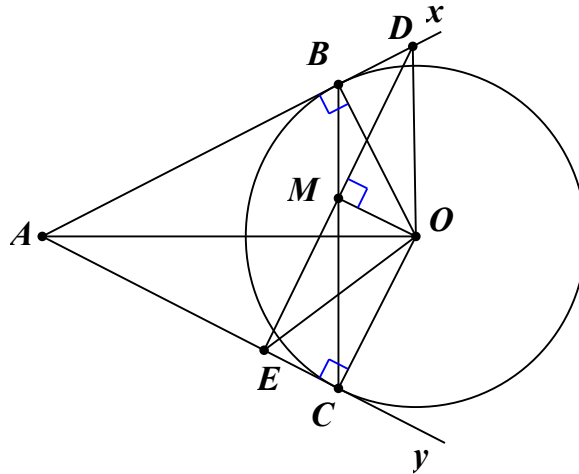
$$\text{Tương tự } \widehat{M_1} + \widehat{MOD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{MOD}.$$

Hai đỉnh B và O cùng nhìn hai đỉnh còn lại M, D dưới hai góc bằng nhau nên bốn điểm M, O, B, D cùng thuộc 1 đường tròn.

Dễ thấy tứ giác $MOBK$ nội tiếp $\Rightarrow B, D, K, O$ cùng thuộc 1 đường tròn đi qua 3 điểm B, K, O .

Bài toán 32. Cho góc $\widehat{xAy}$ và đường tròn (O) tiếp xúc với Ax và Ay tại B và C . Trên đoạn thẳng BC lấy điểm M (khác B và C). Đường thẳng vuông góc với OM tại M cắt Ax, Ay lần lượt tại D và E . Chứng minh các điểm A, D, O, E cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải



$Ax \perp OB$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{OBD} = 90^\circ$.

$\widehat{DMO} = 90^\circ$ (gt) nên tứ giác $OMBD$ nội tiếp. $\Rightarrow \widehat{ODM} = \widehat{OBM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung OM của đường tròn qua O, M, B, D).

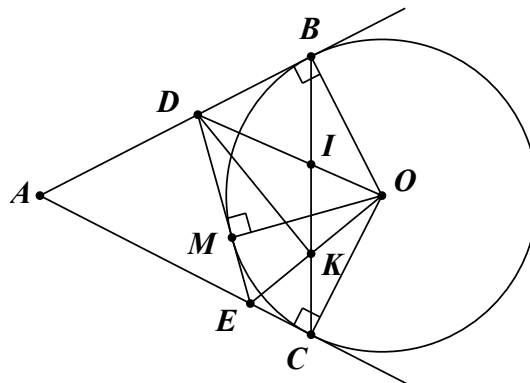
Ta lại có tứ giác $ABOC$ nội tiếp nên $\widehat{OBM} = \widehat{OAC}$.

$\Rightarrow \widehat{ODM} = \widehat{OAC}$ hay $\widehat{ODE} = \widehat{OAE}$

Vì A, D ở cùng phía đối với EO nên A và D nằm trên một cung chứa góc $\frac{1}{2}\widehat{xAy}$ dựng trên OE hay A, D, O, E cùng nằm trên một đường tròn.

Bài toán 33. Cho đường tròn (O) . Từ điểm A nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến AB, AC . Gọi M là điểm thuộc cung nhỏ BC . Tiếp tuyến tại M cắt AB, AC lần lượt ở D và E . Gọi I và K lần lượt là giao điểm OD, OE với BC . Chứng minh rằng tứ giác $OBDK$ nội tiếp.

Lời giải



Để thấy tứ giác $ABOC$ nội tiếp (vì $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$ tính chất tiếp tuyến)
 $\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BOC} = 180^\circ$. Do đó $\widehat{BOC} = 180^\circ - \widehat{A}$.

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có OD, OE lần lượt là phân giác của hai góc kề $\widehat{BOM}$ và $\widehat{MOC}$.

$$\text{Nên } \widehat{DOC} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$$

Mặt khác: $\triangle ABC$ cân ($AB = AC$)

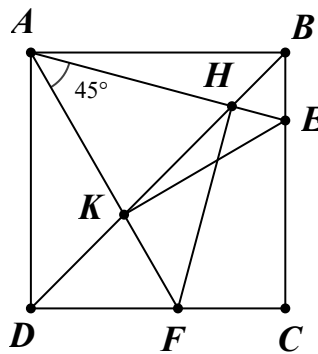
$$\text{Nên } \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{DOE} = \widehat{ABC}$ hay $\widehat{DOK} = \widehat{DBK}$.

Do đó bốn điểm O, B, K, D cùng nằm trên một đường tròn, hay tứ giác $OB DK$ nội tiếp.

Bài toán 34. Trên các cạnh BC và CD của hình vuông $ABCD$ lấy các điểm E và F sao cho $\widehat{EAF} = 45^\circ$. Các đoạn thẳng AE, AF cắt BD theo thứ tự ở H và K . Chứng minh tứ giác $EHKF$ nội tiếp.

Lời giải



Ta có $\widehat{EAF} = \widehat{BDC} = 45^\circ$.

Hai điểm A và D ở cùng phía với HF nên AD thuộc cung chứa góc 45° vẽ trên đoạn HF .
 Hay bốn điểm A, D, F, H cùng thuộc một đường tròn nên tứ giác $ADFH$ nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{ADF} + \widehat{AHF} = 180^\circ \text{ mà } \widehat{ADF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AHF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FHE} = 90^\circ$$

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{FKE} = 90^\circ$.

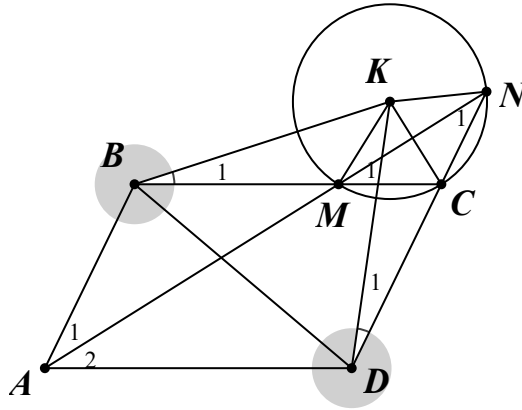
Do đó $EHKF$ là tứ giác nội tiếp.

Bài toán 35. Cho hình bình hành $ABCD$ có góc A nhọn ($AB < AD$). Các phân giác của góc BAD cắt BC tại M và cắt DC tại N . Gọi K là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MCN .

a) Chứng minh $DN = BC$ và CK vuông góc với MN .

b) Chứng minh tứ giác $BKCD$ nội tiếp.

Lời giải



a) Ta có $AB \parallel CD$ (gt) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{N_1}$ (so le trong) mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{N_1}$. Do đó $\triangle AND$ cân tại D

$$\Rightarrow \begin{cases} DN = DA \\ DA = BC \end{cases} \Rightarrow DN = BC$$

Ta có $\widehat{A_2} = \widehat{M_1}$ (đồng vị)

$$\widehat{A_2} = \widehat{N_1} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{N_1} \text{ hay } \triangle MCN \text{ cân tại } C \Rightarrow CM = CN$$

Lại có $KM = KN (= R)$ (R là bán kính của đường tròn (K)).

Do đó CK là đường trung trực của $MN \Rightarrow CK \perp MN$.

b) Dễ thấy $\triangle KNC = \triangle KMC$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{CNK} = \widehat{CMK} \text{ (góc tương ứng) hay } \widehat{DNK} = \widehat{CMK} \text{ (1)}$$

Lại có $\triangle MKC$ cân tại $K \Rightarrow \widehat{CMK} = \widehat{MCK}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{DNK} = \widehat{MCK}$.

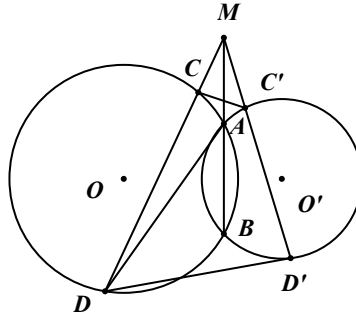
Xét $\triangle BKC$ và $\triangle DKN$ có $BC = DN$ (cmt), $\widehat{BCK} = \widehat{DNK}$ (cmt)

$$KC = KN (= R).$$

Do đó $\triangle BKC = \triangle DKN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ hai đỉnh B, D cùng nhìn CK dưới hai góc bằng nhau nên tứ giác $BKCD$ nội tiếp.

Bài toán 36. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Gọi M là điểm tùy ý trên đường thẳng AB và nằm ngoài đoạn AB . Vẽ qua M hai cát tuyến MCD và $MC'D'$ với (O') và (O) . Chứng minh tứ giác $CDD'C'$ nội tiếp.

Lời giải



Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{CDA} = \widehat{CBM}$ (cùng bù với $\widehat{ABC}$).

Do đó $\triangle MBC \sim \triangle MDA$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD.$$

Chứng minh tương tự:

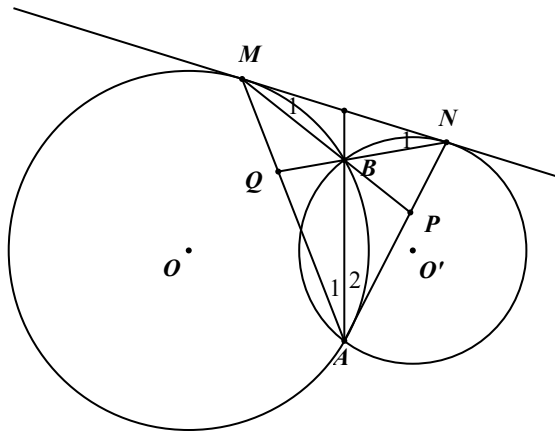
$$MA \cdot MB = MC' \cdot MD' \Rightarrow MC \cdot MD = MC' \cdot MD'$$

Do đó $\triangle MCC' \sim \triangle MDD'$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{MCC'} = \widehat{MD'D}$.

Vậy tứ giác $CDD'C'$ nội tiếp.

Bài toán 37. Cho đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm A và B , và O, O' về hai phía của dây chung AB . Vẽ tiếp tuyến chung MN sao cho $M \in (O)$ và $N \in (O')$ đường thẳng AB cắt MN tại I (B nằm giữa A và I). Đường thẳng MA cắt đường thẳng NB tại Q , đường thẳng NA cắt đường thẳng MB tại P . Chứng minh tứ giác $APBQ$ nội tiếp.

Lời giải



Ta có $\widehat{M_1} = \widehat{A_1}$ (1) (góc giữa tiếp tuyến và dây cung, góc nội tiếp cùng chắn cung MB).

Tương tự $\widehat{N_1} = \widehat{A_1}$ (2).

Xét $\triangle MBM$ có $\widehat{M_1} + \widehat{MBN} + \widehat{N_1} = 180^\circ$ (3)

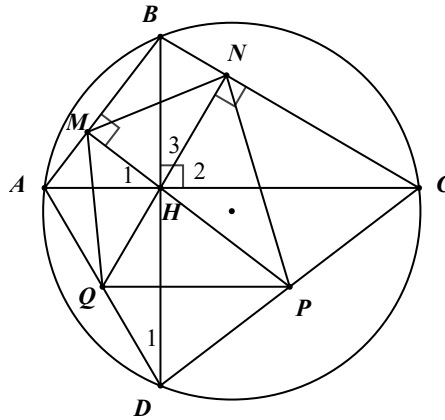
mà $\widehat{MBN} = \widehat{QBP}$ (đối đỉnh) (4)

$\Rightarrow$ Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow \widehat{QBP} + \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 180^\circ$

Do đó tứ giác $APBQ$ nội tiếp.

Bài toán 38. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại H . (H không trùng với tâm của đường tròn). Gọi M, N lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ H xuống các đường thẳng AB, BC , P và Q theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng MH, NH với các đường thẳng CD và AD . Chứng minh rằng PQ và AC song song với nhau và 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



Ta có $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{CD}$).

$\widehat{CBD} = \widehat{H}_2$ (cùng phụ với $\widehat{H}_3$)

$\widehat{H}_2 = \widehat{H}_1$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{H}_1$

$AC \perp BD$ (gt) $\Rightarrow \widehat{H}_1 + \widehat{H}_4 = 90^\circ$

$\widehat{D}_1 = \widehat{CAD} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{H}_4 = \widehat{D} \Rightarrow \Delta HQD$ cân tại $Q \Rightarrow QH = QD$

Lại có ΔAQH cân tại $Q \Rightarrow QH = QA$

$\Rightarrow QA = QD$

Chứng minh tương tự ta có $PD = PC$.

Do đó QP là đường trung bình $\Delta ADC \Rightarrow QP \parallel AC$

$\Rightarrow \widehat{QNP} = \widehat{H}_1$ (so le trong)

$\widehat{H}_1 = \widehat{CAD}$; $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{QNP} = \widehat{CBD}$ (1)

Xét tứ giác $BNHM$ có $\widehat{BNH} + \widehat{BMH} = 180^\circ \Rightarrow BNHM$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{NBH} = \widehat{NMH}$ hay $\widehat{CBD} = \widehat{NMP}$

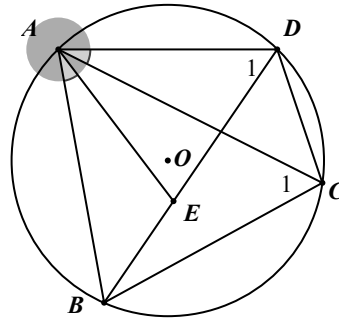
Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{QNP} = \widehat{NMP}$. Hai đỉnh M và Q cùng nhìn 2 đỉnh còn lại NP dưới hai góc bằng nhau nên bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán 39. Chứng minh rằng trong một tứ giác nội tiếp, tích của hai đường chéo bằng tổng các tích của hai cặp cạnh đối.

Định lý: Ptô-lê-mê (Plolê-mê nhà toán học Hy Lạp).

Hướng dẫn: Điều phải chứng minh: $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

Lời giải



Vẽ tia AE hợp với tia AB một góc $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$.

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACD$ có $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$ (cách vẽ)

$\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$ (góc nội tiếp chắn cung AD)

$$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ACD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$$

$$\Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BE \quad (1)$$

Lại có $\widehat{BAE} = \widehat{CAD} \Rightarrow \widehat{BAE} + \widehat{A_1} = \widehat{CAD} + \widehat{A_1}$

hay $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle AED$ có $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

và $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}$ (cmt)

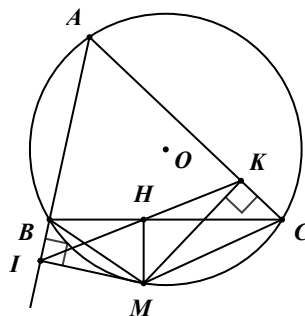
$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AED \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot DE = AC(BE + DE) = AC \cdot BD$$

Bài toán 40. Từ một điểm bất kì trên đường tròn ngoại tiếp của một tam giác kẻ các đường vuông góc xuống ba cạnh của tam giác thì chân ba đường vuông góc đó thẳng hàng (Đường thẳng Sin Sơn).

Lời giải



Gọi chân ba đường vuông góc kẻ từ M đến ba cạnh AB, BC, AC lần lượt là I, H, K .

$$\text{Ta có: } \widehat{MIB} = \widehat{MHB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MIB} + \widehat{MHB} = 180^\circ$$

Do đó $MIBH$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{IHM} = \widehat{IBM} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } MI \text{)}$$

Lại có bốn điểm $ABMC$ cùng thuộc đường tròn (hay tứ giác $ABMC$ nội tiếp)

$$\Rightarrow \widehat{IBM} = \widehat{ACM}$$

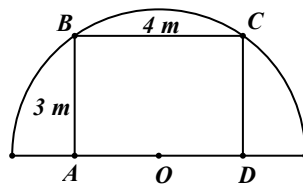
Dễ thấy tứ giác $MHKC$ nội tiếp vì $\widehat{MHK} = \widehat{NKC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{ACM} + \widehat{MHK} = 180^\circ. \text{ Mà } \widehat{ACM} = \widehat{IBM} = \widehat{IHM} \text{ (cmt)}$$

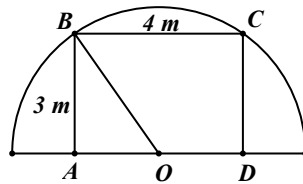
$$\Rightarrow \widehat{IHM} + \widehat{MHK} = 180^\circ. \text{ Hay } I, H, K \text{ thẳng hàng.}$$

III Toán thực tế

Bài toán 41. Người ta muốn dựng một khung cổng hình chữ nhật rộng $4m$ và cao $3m$, bên ngoài khung cổng được bao bởi một khung thép dạng nửa đường tròn như hình vẽ. Tính chiều dài của đoạn thép làm khung nửa đường tròn đó.



Lời giải



(Xem hình vẽ).

$$\text{Ta có: } OA = \frac{AD}{2} = \frac{4}{2} = 2(m)$$

Xét tam giác ABD vuông tại A .

$$\text{Theo định lí Pythagore, ta có: } OB^2 = OA^2 + AB^2 = 2^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow OB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}(m)$$

Vậy chiều dài của đoạn thép làm khung là nửa chu vi đường tròn (O) .

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2} \pi \cdot 2\sqrt{13} = \pi\sqrt{13} \approx 11,33(m).$$

☞ HẾT ☞

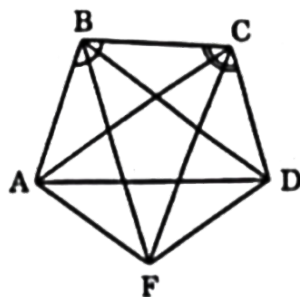
CHƯƠNG IX. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

Bài 30. ĐA GIÁC ĐỀU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

ĐA GIÁC Trong đa giác $ABCDE$ ở hình vẽ:

- Các đỉnh là các điểm A, B, C, D, E ;
- Các cạnh là các đoạn thẳng AB, BC, CD, DE, EA ;
- Các cặp đỉnh kề nhau là: A và B , B và C , C và D , D và E , E và A ;



- Các đường chéo là các đoạn thẳng nối hai đỉnh không kề nhau: AC, AD, BD, BE, CE ;
- Các góc là: $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDE}, \widehat{DEA}, \widehat{EAB}$.

Đa giác có n đỉnh ($n \geq 3$) được gọi là hình n – giác hay hình n cạnh.

Ta thường gọi các đa giác có 3, 4, 5, 6, 8 đỉnh là tam giác, tứ giác, ngũ giác, lục giác, bát giác.

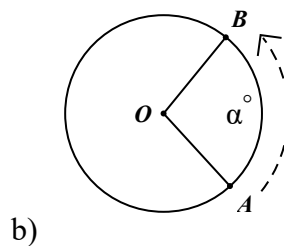
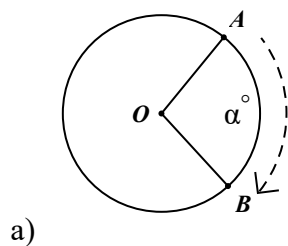
I. Đa giác đều

- Đa giác lồi là đa giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của đa giác.
- Đa giác đều là một đa giác lồi có cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau.

II. Phép quay

Phép quay thuận chiều α° ($0^\circ < \alpha^\circ < 360^\circ$) tâm O giữ nguyên điểm O , biến điểm A khác điểm O thành điểm B thuộc đường tròn $(O; OA)$ sao cho tia OA quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia OB thì điểm A tạo nên cung AB có số đo α° (Hình a).

Định nghĩa tương tự cho phép quay ngược chiều α° tâm O (Hình b). Phép quay 0° và phép quay 360° giữ nguyên mọi điểm.



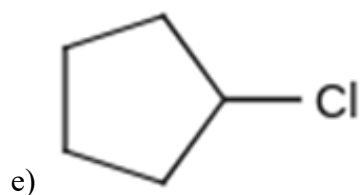
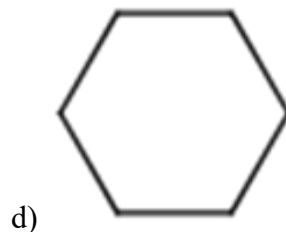
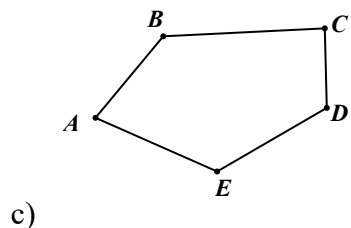
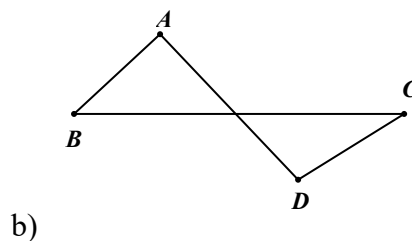
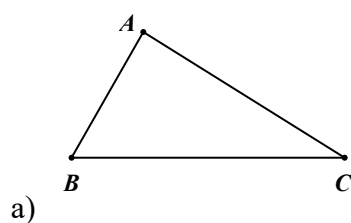
Một phép quay được gọi là giữ nguyên một đa giác đều H nếu phép quay đó biến mỗi điểm H thành một điểm của H .

Người ta nghĩ ra rằng nếu một phép quay biến các đỉnh của đa giác đều H thành các đỉnh của H thì phép quay đó giữ nguyên H .

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Nhận dạng đa giác đều

Bài toán 1. Tìm các đa giác lồi trong hình vẽ và giải thích.



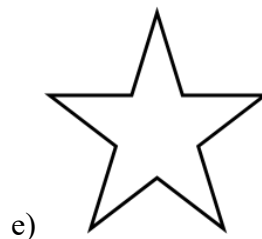
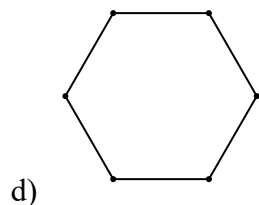
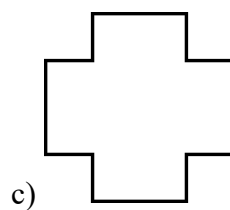
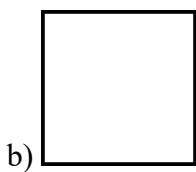
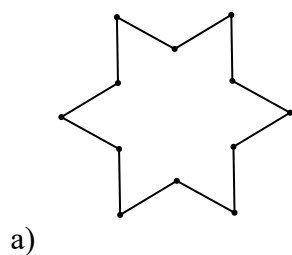
Lời giải

Các đa giác trong hình a, c, e là các đa giác lồi vì đa giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của đa giác.

Đa giác ở hình b không phải là đa giác lồi vì không cùng nằm về một phía so với đường thẳng AD hoặc BC .

Hình d cũng không phải là đa giác lồi và không cùng nằm về một phía so với đường thẳng BC hoặc CD .

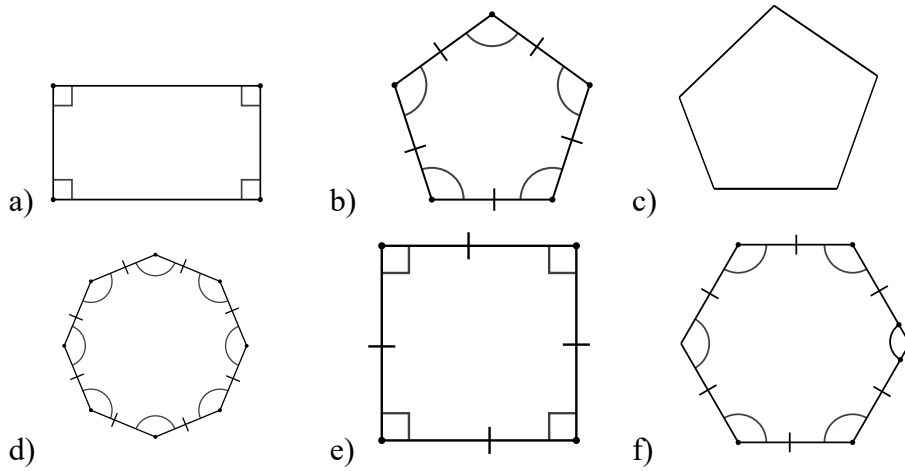
Bài toán 2. Trong các hình phẳng sau, hình nào là hình phẳng có dạng đa giác đều?



Lời giải

Hình phẳng có dạng đa giác đều là hình b và d.

Bài toán 3. Tìm và gọi tên các đa giác đều có trong hình vẽ dưới đây.



Lời giải

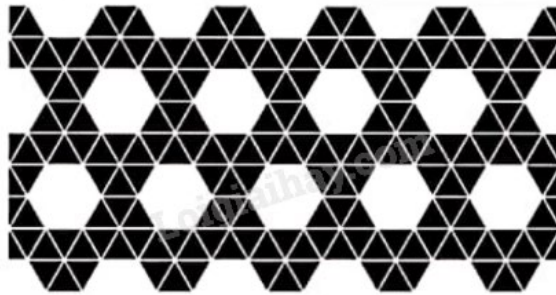
Hình 3b là ngũ giác đều;

Hình 3d là bát giác đều;

Hình 3e là tứ giác đều;

Hình 3g là lục giác đều.

Bài toán 4. Kể tên các loại đa giác đều có trong hình.

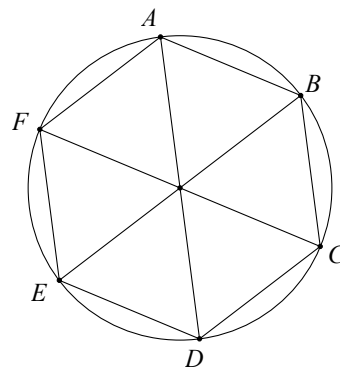


Lời giải

Các đa giác đều có trong hình là: Tam giác đều, tứ giác đều và lục giác đều.

Bài toán 5. Cho đường tròn $(O; R)$. Lấy các điểm A, B, C, D, E, F trên đường tròn $(O; R)$ sao cho số đo các cung $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{DE}$, $\widehat{EF}$, $\widehat{FA}$ bằng nhau. Đa giác $ABCDEF$ có là đa giác đều không?

Lời giải



Ta có $sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{BC} = sđ\widehat{CD} = sđ\widehat{DE} = sđ\widehat{EF} = sđ\widehat{FA} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Xét tam giác AOB cân tại O có $\widehat{AOB} = 60^\circ$ (vì $sđ\widehat{AB} = 60^\circ$)

$\Rightarrow \Delta AOB$ đều nên $AB = R$ và $\widehat{ABO} = 60^\circ$ (1)

Tương tự với tam giác BOC đều $\Rightarrow \widehat{OBC} = 60^\circ$ và $BC = R(2)$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{OBC} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ và $AB = BC = R$.

Chứng minh tương tự với các cạnh và các góc còn lại ta có đa giác ABCD có:

$AB = BC = CD = DE = EF = FA = R$.

Và các góc $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDE} = \widehat{DEF} = \widehat{EFA} = \widehat{FAB} = 120^\circ$.

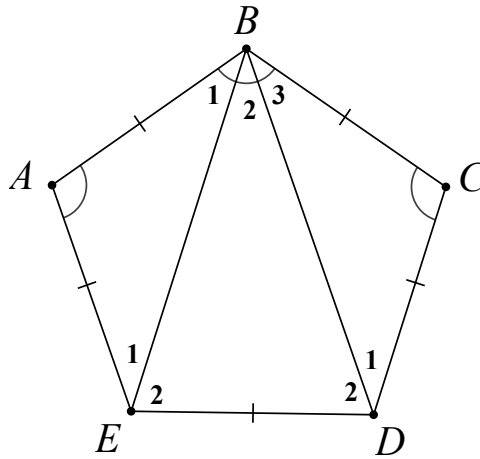
Do đó ABCDEF là một đa giác đều.

Bài toán 6. Cho ngũ giác ABCDE có các cạnh bằng nhau và $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 108^\circ$. Ngũ giác ABCDE có phải là ngũ giác đều không?

Hướng dẫn: Để chứng minh ngũ giác ABCDE đều ta phải chứng minh:

- Các cạnh bằng nhau (giả thiết đã cho).
- Các góc bằng nhau: $\widehat{D} = \widehat{E} = 108^\circ$.

Lời giải



Ta có: $AB = BC = CD = DE = EA$ (gt) (*)

Xét tam giác ABE có $AB = AE$ (gt)

nên $\triangle ABE$ cân tại A có $\widehat{A} = 108^\circ$ (gt)

$$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$

Tương tự với tam giác BCD, ta có: $\widehat{B}_3 = \widehat{D}_1 = 36^\circ$

Lại có $\widehat{ABC} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 = 108^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{B}_2 = 108^\circ - (\widehat{B}_1 + \widehat{B}_3) = 108^\circ - (36^\circ + 36^\circ) = 36^\circ$$

Dễ thấy $\triangle ABE = \triangle CBD$ (c.g.c)

$\Rightarrow BE = BD$ hay tam giác EBD cân tại B có $\widehat{B}_2 = 36^\circ$

$$\widehat{E}_2 = \widehat{D}_2 = \frac{180^\circ - \widehat{B}_2}{2} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

Khi đó $\widehat{AED} = \widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 36^\circ + 72^\circ = 108^\circ$

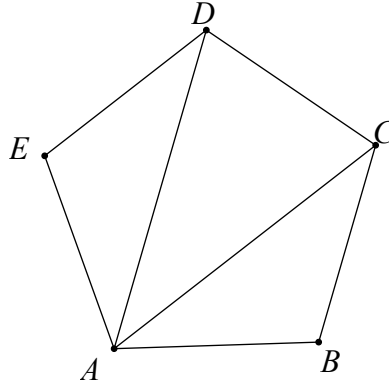
Tương tự $\widehat{CDE} = 108^\circ$

Vậy $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E} = 108^\circ (**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ $\Rightarrow$ ngũ giác ABCDE là ngũ giác đều (Các cạnh bằng nhau, các góc bằng nhau).

II. Tính toán

Bài toán 7. Cho ngũ giác đều ABCDE như hình vẽ.



- Tính tổng các góc trong của tam giác ABC, ACD, ADE, từ đó suy ra tổng các góc trong ngũ giác đều ABCED.
- Tính số đo góc E.

Lời giải

- Tổng các góc trong của tam giác ABC bằng 180° .

Tương tự với hai tam giác còn lại ACD và ADE.

Vậy tổng các góc trong của ba tam giác ABC, ACD và ADE là: $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$

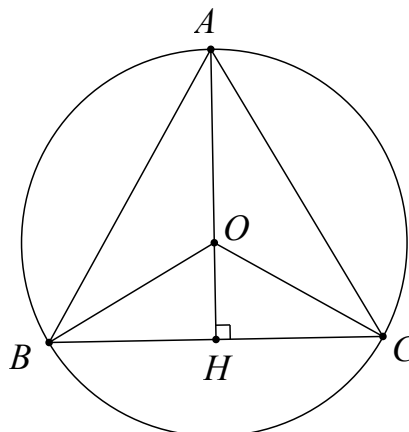
$\Rightarrow$ Tổng các góc trong của ngũ giác đều ABCED là 540° .

- Vì ABCED là ngũ giác đều nên tất cả các góc đều bằng nhau nên số đo mỗi góc của ngũ giác đều bằng $\frac{540}{5} = 108^\circ$.

Vậy số đo góc E bằng 108° .

Bài toán 8. Cho hình tròn $(O; R)$.

- Vẽ hình tam giác đều, hình vuông, hình lục giác đều có các đỉnh nằm trên $(O; R)$.
- Tính các cạnh của các hình vừa vẽ theo R .

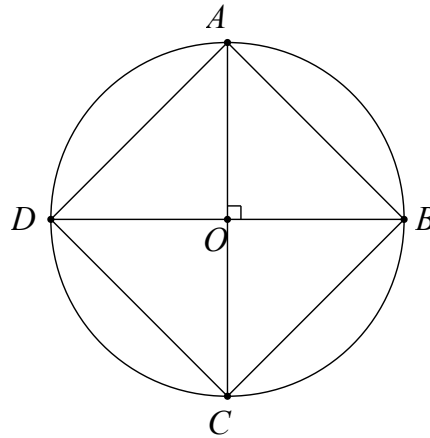


Lời giải

a) - Vẽ tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$

Vẽ đường cao AH , ta có: $AB = AC; OB = OC = R$

Nên A, O, H thuộc đường trung trực của BC vì ΔABC đều nên O là trọng tâm của tam giác.



Ta có $AH = \frac{3}{2}AO = \frac{3}{2}R$ (1) (tính chất trọng tâm)

Lại có AH là đường cao của tam giác ABC đều nên $AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{3}{2}R = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{3R}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot R$

Vậy cạnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn $(O; R)$ là $\sqrt{3} \cdot R$.

-Vẽ hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$

Ta có: $AC \perp BD$ (tính chất hai đường chéo hình vuông)

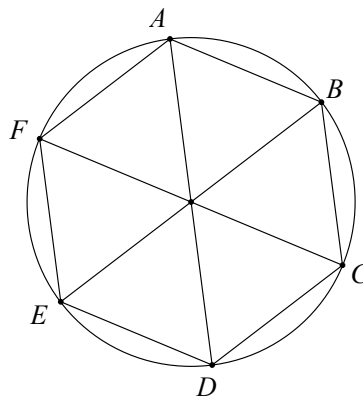
Xét tam giác AOB vuông tại O .

Theo định lý Pythagore, ta có: $AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$

$\Rightarrow AB = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$.

Vậy cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn $(O; R)$ là $R\sqrt{2}$.

-Vẽ lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$



Vì $ABCDEF$ là lục giác đều $\Rightarrow AB = BC = CD = DE = EF = FA$

$$\Rightarrow sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{BC} = sđ\widehat{CD} = sđ\widehat{DE} = sđ\widehat{EF} = sđ\widehat{FA}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOF} = \widehat{FOA} = \frac{360}{6} = 60^\circ$$

Xét tam giác AOB cân tại O có $\widehat{AOB} = 60^\circ$ nên $\triangle AOB$ đều $\Rightarrow AB = R$.

Chứng minh tương tự, ta có $BC = CD = DE; EF = FA = AB = R$.

Vậy cạnh của hình lục giác đều nội tiếp đường tròn $(O; R)$ là R .

Ghi nhớ: Bán kính đường tròn ngoại tiếp là R .

- Độ dài cạnh tam giác đều nội tiếp là $R\sqrt{3}$

- Độ dài cạnh hình vuông nội tiếp là $R\sqrt{2}$.

- Độ dài cạnh hình lục giác đều nội tiếp

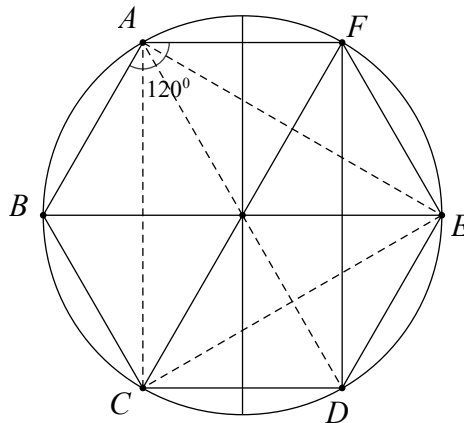
III. Phép quay

Bài toán 9. Cho lục giác đều $ABCDEF$.

a) Tính số đo các góc BCF, BDF, BEF .

b) Gọi O là tâm của lục giác đều. Hãy chỉ ra ba phép quay tâm O giữ nguyên tam giác ACE .

Lời giải



a) Dễ thấy $ABCDEF$ là lục giác đều nên $\widehat{ABF} = \widehat{AFE} = \widehat{FED} = \widehat{EDC} = \widehat{DCB} = \widehat{CBA} = 120^\circ$.

Ta có tứ giác $ABCF$ nội tiếp đường tròn (R) nên $\widehat{BCF} = \widehat{BAF} = 180^\circ$ hay

$$\widehat{BCF} + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BCF} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Tương tự tứ giác $ABDF$ nội tiếp đường tròn (R) nên $\widehat{BDF} = \widehat{BAF} = 180^\circ$ hay

$$\widehat{BDF} + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BDF} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Tương tự ta có $\widehat{BEF} = 60^\circ$.

b) Ba đỉnh A, C, E của tam giác đều ACE chia đường tròn (O) thành ba cung bằng nhau:

$$sđ\widehat{AC} = sđ\widehat{CE} = sđ\widehat{EA} = 120^\circ.$$

Do đó có 6 phép quay tâm O giữ nguyên tam giác đó là:

Phép quay $120^\circ, 240^\circ$ thuận chiều hoặc 120° ngược chiều.

Nhận xét: Có tất cả 6 phép quay $120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$ tâm O thuận chiều hoặc ngược chiều kim đồng hồ giữ nguyên tam giác.

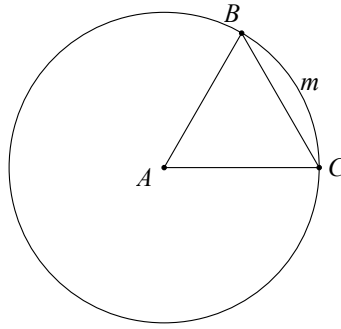
Bài toán 10. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . Hãy chỉ ra các phép quay biến tam giác thành chính nó.

Hướng dẫn: Tương tự câu b, **bài toán 9**, có tất cả 6 phép quay đó là phép quay $120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$ tâm O thuận chiều và ngược chiều.

Bài toán 11. Cho tam giác ABC đều như hình vẽ. Điểm B biến thành điểm nào:

- Phép quay thuận chiều 60° tâm A
- Phép quay ngược chiều 300° tâm A

Lời giải



a) Tam giác ABC đều nên $AB = AC$. Do đó C thuộc đường tròn $(A; AB)$.

Xét đường tròn $(A; AB)$, ta có: $\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow sđ\widehat{BmC} = 60^\circ$

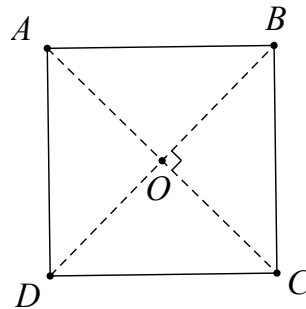
Khi đó điểm B biến thành điểm C qua phép quay thuận chiều 60° tâm A .

b) Ta có: $sđ\widehat{BnC} = 360^\circ - sđ\widehat{BmC} = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

Khi đó điểm B biến thành điểm C qua phép quay ngược chiều 300° tâm A .

Bài toán 12. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O (hình vẽ). Nêu các phép quay giữ nguyên hình vuông đó.

Lời giải



Ta có bốn điểm A, B, C, D thuộc đường tròn tâm O là giao điểm hai đường chéo AC và BD .

Ta có $AC \perp BD$.

Có 8 phép quay giữ nguyên hình vuông $ABCD$ là:

- Phép quay $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ tâm O thuận chiều.
- Phép quay $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ tâm O ngược chiều.

Bài toán 13. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O như hình vẽ. Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm D thì các điểm B, C, D tương ứng biến thành các điểm nào?

Lời giải

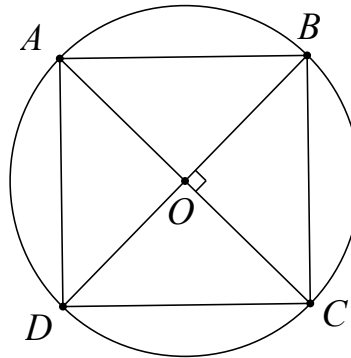
Ta có $ABCD$ là hình vuông nên $OA = OB = OC = OD$ và $AC \perp BD$.

Ta có: $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = 90^\circ$.

Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm D là phép quay $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$. Khi đó điểm B biến thành điểm A , điểm C biến thành điểm B và điểm D biến thành điểm C .

Bài toán 14. Cho hình vuông nội tiếp đường tròn tâm O . hãy cho biết các phép quay thuận chiều lần lượt $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ với tâm O sẽ biến các điểm A, B, C, D thành những điểm nào?

Lời giải

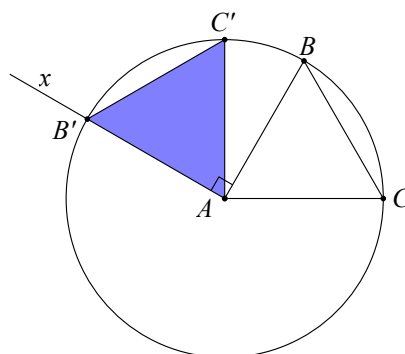


Các phép quay thuận chiều lần lượt là $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ với tâm O biến các điểm A, B, C, D thành những điểm tương ứng cho bởi bảng sau:

Đỉnh Phép quay cùng chiều	A	B	C	D
90°	B	C	D	A
180°	C	D	A	B
270°	D	A	B	C

Bài toán 15. Cho tam giác đều, thực hiện phép quay ngược chiều tâm A góc 90° ta được tam giác đều. Hãy vẽ tam giác đều đó.

Lời giải



Cách dựng: Phép quay ngược chiều 90° tâm A , biến điểm B biến thành điểm B' .

Xác định điểm B' theo hướng dẫn sau:

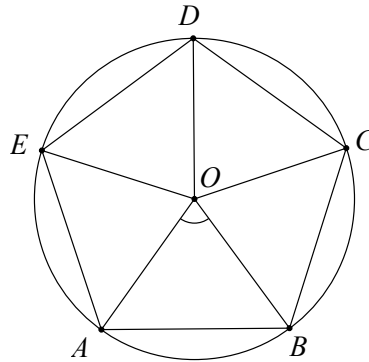
Vẽ đường tròn $(A; AB)$ và tia Ax sao cho $\widehat{BAx} = 90^\circ$, tia Ax cắt đường tròn $(A; AB)$ tại điểm B' .

Tương tự ta dựng được điểm C' .

Bài toán 16. Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$ có tâm O (Hình vẽ).

- a) Phép quay ngược chiều tâm O biến điểm A thành điểm B thì các điểm B, C, D, E tương ứng biến thành các điểm nào?
 b) Chỉ ra ba phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều đã cho.

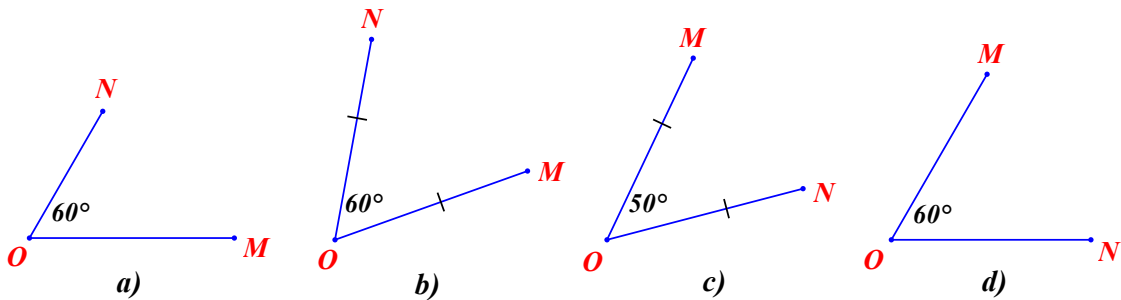
Lời giải



- a) Phép quay ngược chiều 72° tâm O biến điểm A , biến B thì các điểm B, C, D, E lần lượt biến thành các điểm C, D, E và A .
 b) Ba phép quay tâm O giữ nguyên hình ngũ giác đều:
 1. Phép quay ngược chiều 144° ;
 2. Phép quay ngược chiều 216° ;
 3. Phép quay thuận chiều 72° .

Bạn hãy tìm thêm những phép quay còn lại giữ nguyên hình ngũ giác đều.

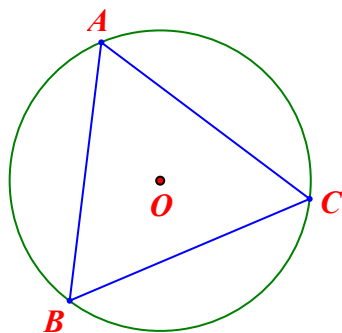
Bài toán 17. Trong các hình dưới đây, hình nào vẽ hai điểm M và N thỏa mãn phép quay thuận chiều 60° tâm O biến điểm M thành điểm N ?



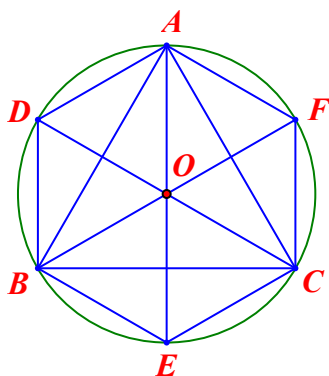
Lời giải

Phép quay thuận chiều 60° tâm O biến điểm M thành điểm N là hình d, vì ta có $OM = ON$ và $\widehat{MON} = 60^\circ$.

Bài toán 18. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) như hình vẽ. Phép quay ngược chiều 60° tâm O biến các điểm A, B, C lần lượt thành các điểm D, E, F . Chứng minh. rằng $ADBECF$ là một lục giác đều.



Lời giải



Phép quay ngược chiều 60° tâm O biến A thành D.

Ta có: $OD = OA$ và $\widehat{AOD} = 60^\circ$ nên tam giác AOD là tam giác đều $\Rightarrow AD = OA = OD = R$ (R là bán kính đường tròn (O)).

Chứng minh tương tự, ta có: $BE = CF = R \Rightarrow AD = BE = CF = R$ (*)

Tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O), ta có: $OD = OA = OB$ (1)

Lại có $\widehat{AOB} = 120^\circ$ mà $\widehat{AOD} = 60^\circ$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{DOB} = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tam giác DOB là tam giác đều. $\rightarrow$

chứng minh tương tự các tam giác ECC và FOA cũng là tam giác đều

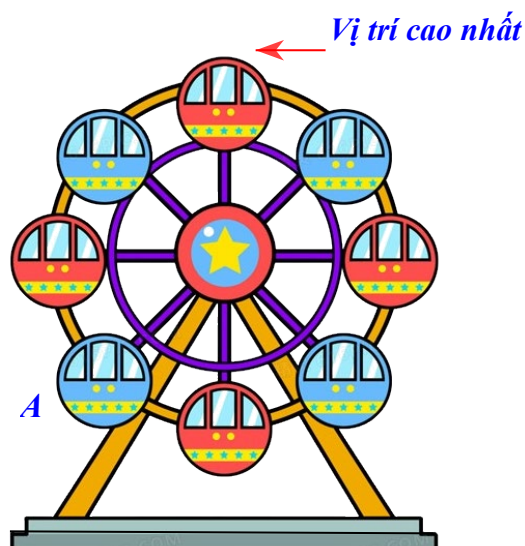
$\Rightarrow DB = EC = EA = R$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow AD = DB = BE = EC = CE = EA (= R)$ (3)

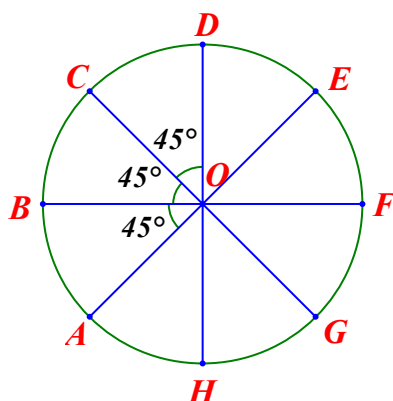
Dễ thấy $\widehat{ADB} = \widehat{DBE} = \widehat{BEC} = \widehat{ECF} = \widehat{CFA} = \widehat{FAD}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ ADBECF là một lục giác đều.

Bài toán 19. Cho vòng quay mặt trời gồm 8 cabin như hình vẽ. Hỏi để cabin A di chuyển đến vị trí cao nhất thì vòng quay phải quay thuận chiều kim đồng hồ quanh tâm bao nhiêu độ?



Lời giải



Ta có một bát giác đều $ABCDEFGH$ nội tiếp trong đường tròn (O) , mỗi góc ở tâm là:
 $360^\circ : 8 = 45^\circ$ (Xem hình vẽ).

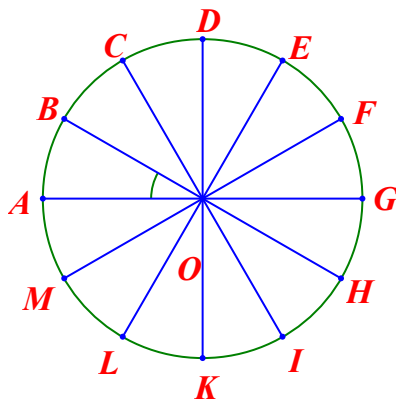
Theo giả thiết, ta có: $\widehat{AOD} = 45^\circ \cdot 3 = 135^\circ$.

Vậy qua phép quay thuận chiều 135° tâm O , cabin A di chuyển đến vị trí cao nhất (điểm D).

Bài toán 20. Vòng trong của mái giếng trời hình hoa sen của nhà ga Bến Thành (Thành phố Hồ Chí Minh) có dạng đa giác đều 12 cạnh (Hình vẽ). Hãy chỉ ra bốn phép quay biến đa giác đều đó thành chính nó.



Lời giải



Đa giác đều 12 cạnh ABCDEFGHIKLM nội tiếp đường tròn (O) (Xem hình vẽ).

$$\text{Ta có: } \widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

$$\text{và } \widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \dots = 30^\circ$$

Và $OA = OB = OC = OD = \dots$ (bán kính đường tròn ngoại tiếp)

Ta chọn phép quay thuận chiều (hoặc ngược chiều) góc quay $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ biến đa giác đã cho thành chính nó.

♣ HẾT ♣

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

A. TRẮC NGHIỆM

1. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Góc nội tiếp có số đo bằng số đo cung bị chắn.
- B. Góc có hai cạnh chứa các dây cung của đường tròn là góc nội tiếp đường tròn đó.
- C. Góc nội tiếp có số đo bằng một nửa số đo cung bị chắn.
- D. Góc có đỉnh nằm trên đường tròn là góc nội tiếp đường tròn đó.

2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn có $\widehat{A} - \widehat{C} = 100^\circ$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\widehat{A} = 80^\circ$.
- B. $\widehat{B} = 80^\circ$.
- C. $\widehat{B} + \widehat{D} = 100^\circ$.
- D. $\widehat{A} = 140^\circ$.

3. Đa giác nào sau đây không nội tiếp một đường tròn?

- A. Đa giác đều.
- B. Hình chữ nhật.
- C. Hình bình hành.
- D. Tam giác.

Hướng dẫn - Đáp án

1. Chọn C.

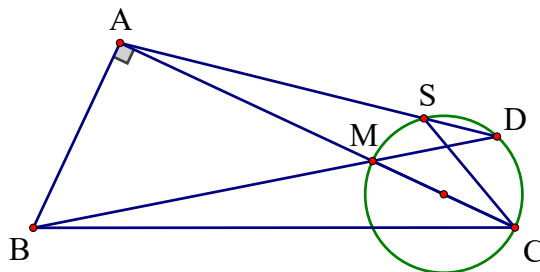
2. Chọn D.

3. Chọn C.

B. TỰ LUẬN

4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên AC lấy một điểm M và dựng đường tròn đường kính MC. Nối BM kéo dài gặp đường tròn tại D. Đường thẳng DA gặp đường tròn tại S. Chứng minh rằng CA là tia phân giác của góc SCB.

Lời giải



Trường hợp 1: D nằm trên cung lớn $\widehat{MS}$.

Ta có $\widehat{SCM} = \widehat{SDM}$ (1) góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{MS}$ của đường tròn đường kính MC).

Dễ thấy $\widehat{MDC} = 90^\circ$ (MC là đường kính)

Tương tự $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (gt)

$\Rightarrow$ Bốn điểm B, A, D, C cùng nằm trên một đường tròn đường kính BC.

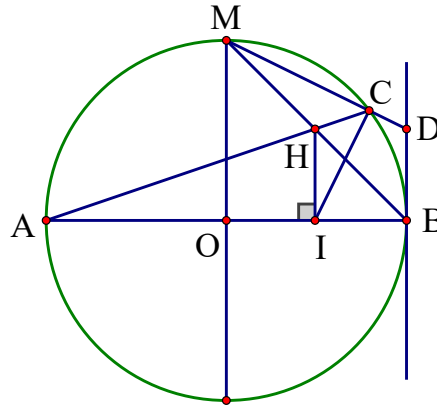
$\Rightarrow \widehat{SDM} = \widehat{ACB}$ (2) (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AB}$).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{SCM} = \widehat{MCB}$ hay CA là tia phân giác của góc SCB.

Trường hợp 2: D nằm trên cung nhỏ MS và Trường hợp 3: D trùng với S. (Học sinh tự giải).

5. M ở chính giữa nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên cung nhỏ BM lấy điểm C bất kì. Vẽ tiếp tuyến tại B của (O) cắt MC tại D. Gọi H là giao điểm của MB và AC. Kẻ HI vuông góc với AB. Chứng minh rằng CA là tia phân giác của góc $\widehat{MCI}$.

Lời giải



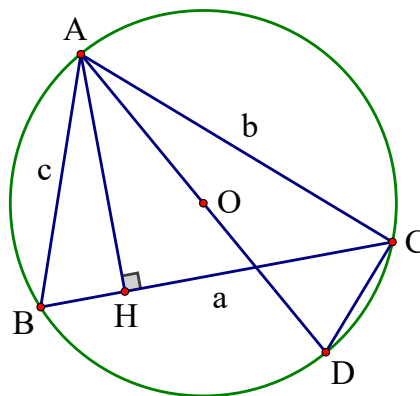
Dễ thấy $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (vì AB là đường kính) $\widehat{HCB} = 90^\circ$ hay C thuộc đường tròn đường kính HB. Lại có $\widehat{HIB} = 90^\circ$ (gt) nên I thuộc đường tròn đường kính HB nên bốn điểm C, H, I, B cùng thuộc đường tròn đường kính HB. $\Rightarrow \widehat{HCI} = \widehat{HBI}$ (1) (góc nội tiếp cùng chắn cung IH). Lại có $\widehat{HBI} = \widehat{MCA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MA) $\Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{MBA}$, chứng tỏ CA là tia phân giác của góc $\widehat{MCI}$.

6. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O; R) đường kính AD, đường cao AH.

a) Chứng minh $\triangle AHB$ và $\triangle ACD$ đồng dạng.

b) Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh tương ứng với các đỉnh A, B, C. Chứng minh: $S_{ABC} = \frac{a.b.c}{4R}$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

Lại có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (AD là đường kính)

Do đó $\triangle AHB \sim \triangle ACD$ (g.g)

$$b) \triangle AHB \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{AD} = \frac{AB \cdot AC}{2R}$$

$$\text{Do đó } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \frac{AB \cdot AC}{2R} \cdot BC = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} = \frac{abc}{4R}.$$

7. Cho tam giác ABC có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC và I là trung điểm của AH . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn tâm I ;
- ME, MF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$.

Lời giải

a) Dễ thấy $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$ (gt).

Tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$ (gt) nên nội tiếp đường tròn tâm I .

b) Ta có tam giác BEC vuông tại E (gt), EM là trung tuyến

$$\Rightarrow EM = BM = CM \text{ hay } \triangle BME \text{ cân tại } M$$

$$\Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{E}_2$$

Lại có H, E thuộc đường tròn tâm I nên $\triangle HIE$ cân tại I

$$\Rightarrow \widehat{H}_2 = \widehat{E}_1 \text{ mà } \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 \text{ (đối đỉnh)} \Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{H}_2$$

Gọi K là chân đường cao kẻ từ A đến BC , ta có tam giác BKH vuông tại K

$$\Rightarrow \widehat{B}_2 + \widehat{H}_1 = 90^\circ \text{ mà } \widehat{B}_2 = \widehat{E}_1, \widehat{H}_2 = \widehat{E}_1 \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 90^\circ \text{ hay } \widehat{IEM} = 90^\circ \Rightarrow ME \perp IE$$

Chúng tỏ ME tiếp xúc với đường tròn (I) ngoại tiếp tứ giác $AEHF$.

Chứng minh tương tự ta có MF tiếp xúc với (I) .

8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng các tứ giác $ANOP, BPOM, CMON$ là các tứ giác nội tiếp.

Lời giải

Ta có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB nên OM, ON, OP lần lượt là các trung tuyến của các tam giác cân BOC, COA và AOB .

Do đó chúng đồng thời là các đường cao của các tam giác cân nêu trên. Dễ dàng ta có

$$\widehat{ANO} = \widehat{APO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ANO} + \widehat{APO} = 180^\circ$$

Do đó tứ giác $ANOP$ nội tiếp

Chứng minh tương tự ta có $BPOM$ và $CMON$ nội tiếp

9. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH ($H \in BC$) và nội tiếp đường tròn tâm O có đường kính AM (Hình vẽ). Chứng minh $\widehat{OAC} = \widehat{BAH}$.

Lời giải

Để thấy $\widehat{ACM} = 90^\circ$ (vì AM là đường kính)

Tam giác ACM vuông tại C $\Rightarrow \widehat{OAC} + \widehat{AMC} = 90^\circ$

Lại có tam giác AHB vuông tại H (gt)

$$\Rightarrow \widehat{BAH} + \widehat{ABC} = 90^\circ$$

Mà $\widehat{AMC} = \widehat{ABC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC) $\Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{BAH}$.

10. Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng a. Góc vuông xAy thay đổi sao cho tia Ax cắt đoạn thẳng BC tại M và tia Ay cắt đoạn thẳng CD kéo dài tại N.

a) Chứng minh hai tam giác ABM và AND bằng nhau;

b) Gọi O là trung điểm của MN. Chứng minh ABMO và ANDO là các tứ giác nội tiếp;

c) Chứng minh ba điểm B, D, O thẳng hàng.

Lời giải

a) Ta có $\widehat{BAM} + \widehat{MAD} = \widehat{BAD} = 90^\circ$ (1)

Lại có $Ax \perp Ay$ nên $\widehat{xAy} = 90^\circ$ hay $\widehat{MAD} + \widehat{DAN} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{DAN}$ nên hai tam giác vuông ABM và AND bằng nhau theo trường hợp g.c.g. $\Rightarrow AM = AN$.

b) Tam giác AMN vuông cân tại A, có AO là đường trung tuyến nên đồng thời là đường cao hay $AO \perp MN$ hay $\widehat{AOM} = 90^\circ$.

Để thấy tứ giác ABMO có $\widehat{ABM} = \widehat{AOM} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{ABM} + \widehat{AOM} = 180^\circ \text{ nên ABMO là tứ giác nội tiếp}$$

Lại có $\widehat{AON} = \widehat{ADN} = 90^\circ$, chứng tỏ bốn điểm A, O, D, N cùng thuộc một đường tròn đường kính AN hay tứ giác ANDO nội tiếp.

c) Ta có tứ giác ABMO nội tiếp (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{BAM} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung BM),}$$

$$\widehat{BAM} = \widehat{DAN} \text{ (cmt)}$$

Lại có tứ giác ANDO nội tiếp (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{DAN} = \widehat{DON} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung DN)}$$

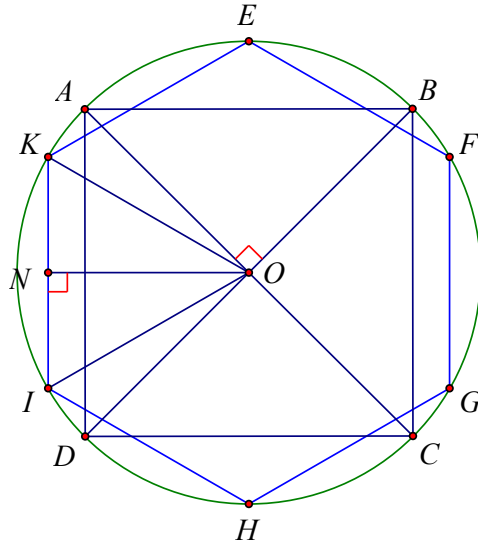
$$\Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{DON}, \text{ mà ba điểm M, O, N thẳng hàng (gt)}$$

$$\Rightarrow B, D, O \text{ thẳng hàng.}$$

11. Cho một hình lục giác đều và một hình vuông cùng nội tiếp một đường tròn. Biết rằng hình vuông có cạnh bằng 3cm. Tính chu vi và diện tích của một hình lục giác đều đã cho.

Lời giải

(Xem hình vẽ).



Ta có tam giác AOB vuông tại O .

Theo định lí Pythagore, ta có: $OA^2 + OB^2 = AB^2$

hay $R^2 + R^2 = 9$

$$2R^2 = 9$$

$$R^2 = \frac{9}{2}$$

$$R = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\text{cm})$$

Ta có cạnh của hình lục giác đều bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp.

Gọi P là chu vi của hình lục giác đều,

$$P = 6 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}(\text{cm})$$

Xét tam giác đều KOI cạnh $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ nên đường cao $ON = OK \cdot \sin \widehat{OKN} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Do đó diện tích tam giác $KOI = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{8}(\text{cm}^2)$

Diện tích hình lục giác đều là: $S = 6 \cdot \frac{18\sqrt{3}}{8} = \frac{27\sqrt{3}}{2}(\text{cm}^2)$

HẾT