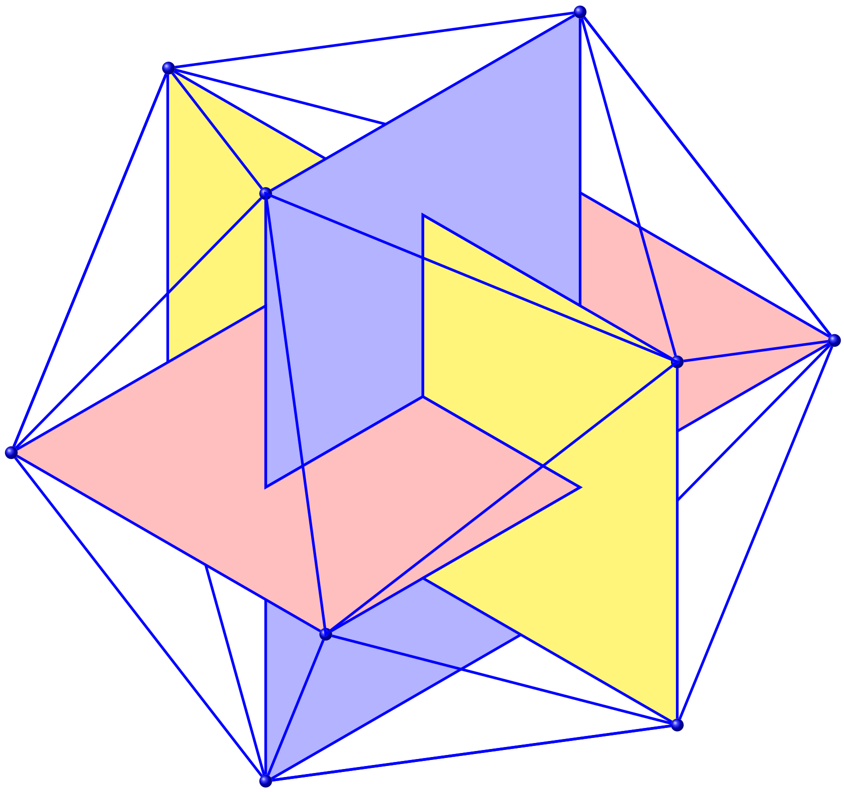
New think - New life

$*_*{*}_*\mathcal{AMS}_*{*}_*{*}$

TUYỂN TẬP ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THÀNH PHỐ HÀ NỘI



HÀ NỘI - 2022

Mục lục

Mở đầu

Kính chào các thầy giáo, cô giáo và các bạn học sinh.

Trên tay các thầy giáo, cô giáo và các bạn học sinh đang là tuyển tập các đề thi vào 10 hệ phổ thông và hệ chuyên của thành phố Hà Nội từ năm học 1988 - 1989 đến năm học 2022 - 2023 được soạn thảo theo chuẩn LaTeX.

Tài liệu được soạn thảo với sự hỗ trợ của nhóm Toán và LaTeX. Đặc biệt với cấu trúc gói đề thi `ex_test` của tác giả Trần Anh Tuấn, Đại học Thương Mại.

Quá trình biên tập dựa trên đề thi các thầy giáo, cô giáo chia sẻ trên mạng không tránh được sơ xuất do tài liệu gốc không rõ. Rất mong thầy giáo, cô giáo thông cảm.

Để tài liệu hoàn thiện và đầy đủ hơn thầy giáo, cô giáo có đề trong tài liệu còn thiếu hoặc sai sót mong thầy giáo, cô giáo gửi về Emai: quochoansp@gmail.com. Trân trọng cảm ơn.

Hà Nội, *ngày 19 tháng 06 năm 2022*
Tác giả. Bùi Quốc Hoàn

CẤU TRÚC ĐỀ THI TOÁN

Câu 1. *(2,0 điểm)*

- Tính giá trị biểu thức.
- Rút gọn biểu thức.
- Các bài toán liên quan.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

- Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình
- Khối hình trụ, hình nón và hình cầu.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

- Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Phương trình bậc hai và các bài toán liên quan đến biểu thức nghiệm.
- Đồ thị hàm số bậc nhất và hàm số bậc hai và các bài toán liên quan.
- Các bài toán liên quan.

Câu 4. *(3,5 điểm)*

- Chứng minh tứ giác nội tiếp hoặc các điểm thuộc một đường tròn.
- Chứng minh tam giác đồng dạng; hệ thức trong tam giác.
- Câu hỏi vận dụng tích hợp kiến thức và suy luận.
- Câu hỏi vận dụng bậc cao tích hợp kiến thức và suy luận.

Câu 5. *(0,5 điểm)*

- Bất đẳng thức, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- Phương trình vô tỉ
- Hệ phương trình bậc cao.

Chương 1

ĐỀ THI VÀO HỆ PHỔ THÔNG

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

1 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1988 - 1989

Câu 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{2-x}{2+x} - \frac{4x^2}{x^2-4}\right) : \frac{x-3}{2x-x^2}$.

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Tìm giá trị của A khi $|x| = 1$.

Câu 2. Một chiếc xe tải đi từ tỉnh A đến tỉnh B với vận tốc 40 km/h. Sau đó 1 giờ 30 phút, một chiếc xe con cũng khởi hành từ tỉnh A đến tỉnh B với vận tốc 60 km/h. Hai xe gặp nhau khi chúng đã đi được một nửa quãng đường AB. Tính quãng đường AB.

Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn và P là trung điểm của cung AB không chứa C và D. Hai dây PC và PD lần lượt cắt AB tại E và F. Các dây AD và PC kéo dài cắt nhau tại I; các dây BC và PD kéo dài cắt nhau tại K.

1. Chứng minh $\widehat{CID} = \widehat{CKD}$.

2. Chứng minh tứ giác $CDEF$ nội tiếp đường tròn.

3. Chứng minh $IK \parallel AB$.

4. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AFD tiếp xúc với PA tại A.

Câu 4. Tìm giá trị của x để biểu thức $M = (2x-1)^2 - |2x-1| + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

2 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1989 - 1990

Câu 1. Cho biểu thức $A = 1 - \left(\dfrac{2}{1+2x} - \dfrac{5x}{4x^2-1} - \dfrac{1}{1-2x}\right) : \dfrac{x-1}{4x^2+4x+1}$.

1. Rút gọn biểu thức A và nêu các điều kiện phải có của x.

2. Tìm giá trị của x để $A = -\dfrac{1}{2}$.

Câu 2. Một ô tô dự định đi từ A đến B với vận tốc $50\,\mathrm{km/h}$. Sau khi đi được $\dfrac{2}{3}$ quãng đường với vận tốc đó, vì đường khó đi nên người lái xe phải giảm vận tốc mỗi giờ $10\,\mathrm{km}$ trên quãng đường còn lại. Do đó ô tô đến B chậm hơn 30 phút so với dự định. Tính quãng đường AB.

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ và E là một điểm bất kỳ trên cạnh BC. Tia Ax vuông góc với AE cắt cạnh CD kéo dài tại F. Kẻ trung tuyến AI của tam giác AEF và kéo dài cắt cạnh CD tại K. Đường thẳng qua E và song song với AB cắt AI tại G.

1. Chứng minh $AE = AF$.

2. Chứng minh tứ giác $EGFK$ là hình thoi.

3. Chứng minh tam giác AKF và tam giác CAF đồng dạng và $AF^2 = KF \cdot CF$.

4. Giả sử E chuyển động trên cạnh BC, chứng minh rằng $FK = BE + DK$ và chu vi tam giác ECK không đổi.

Câu 4. Tìm giá trị của x để biểu thức $M = \dfrac{x^2 - 2x + 1989}{x^2}$ (với $x \neq 0$) đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

3 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1990 - 1991

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} - \dfrac{1}{3\sqrt{x}+1} + \dfrac{5\sqrt{x}}{9x-1}\right) : \left(1 - \dfrac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tìm giá trị của x để $P = \dfrac{6}{5}$.

Câu 2. Một xe tải và một xe con cùng khởi hành từ tỉnh A đến tỉnh B. Xe tải đi với vận tốc 30 km/h, xe con đi với vận tốc 45 km/h. Sau khi đi được $\dfrac{3}{4}$ quãng đường AB, xe con tăng vận tốc thêm 5 km/h trên quãng đường còn lại. Tính quãng đường AB, biết rằng xe con đến tỉnh B sớm hơn xe tải 2 giờ 20 phút.

Câu 3. Cho đường tròn (O), một dây AB và một điểm C nằm ngoài đường tròn trên tia AB. Từ điểm chính giữa của cung lớn AB kẻ đường kính PQ của đường tròn, cắt dây AB tại D. Tia CP cắt đường tròn tại điểm thứ hai I. Các dây AB và QI cắt nhau tại K.

1. Chứng minh tứ giác $PDKI$ nội tiếp đường tròn.
2. Chứng minh $CI \cdot CP = CK \cdot CD$.
3. Chứng minh IC là tia phân giác của góc ở ngoài đỉnh I của tam giác AIB.
4. Giả sử A, B, C cố định. Chứng minh rằng khi đường tròn (O) thay đổi nhưng vẫn đi qua B thì đường thẳng QI luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 4. Tìm giá trị của x để biểu thức $M = x - \sqrt{x-1991}$ đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

4 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1991 - 1992

Câu 1. Cho biểu thức $Q = \left(\dfrac{x-3\sqrt{x}}{x-9} - 1\right) : \left(\dfrac{9-x}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} + \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức Q.

2. Tìm giá trị của x để $Q < 1$.

Câu 2. Một đoàn xe vận tải dự định điều một số xe cùng loại đi vận chuyển 40 tấn hàng. Lúc sắp khởi hành, đoàn xe được giao thêm 14 tấn nữa. Do đó, phải điều thêm 2 xe cùng loại trên và mỗi xe phải chở thêm$0,5$ tấn. Tính số lượng xe phải điều theo dự định. Biết rằng mỗi xe trở số hàng là như nhau.

Câu 3. Cho đoạn thẳng AB và một điểm C nằm giữa A, B. Người ta kẻ trên nửa bờ mặt phẳng bờ AB hai tia Ax và By vuông góc với AB và trên tia Ax lấy một điểm I. Tia vuông góc với CI tại C cắt tia By tại K. Đường tròn đường kính IC cắt IK tại P.

1. Chứng minh tứ giác $CPKB$ nội tiếp đường tròn.

2. Chứng minh $AI \cdot BK = AC \cdot CB$.

3. Chứng minh tam giác APB vuông.

4. Giả sử A, B, I cố định. Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho diện tích hình thang vuông $ABKI$ lớn nhất.

Câu 4. Chứng minh rằng các đường thẳng có phương trình $y = \left(m-1\right)x + 6m - 1991$ (m là tham số) luôn đi qua một điểm duy nhất mà ta có thể xác định được tọa độ của nó.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

5 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1992 - 1993

Câu 1. Cho biểu thức $B=\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(1-\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức B.
2. Tìm $\sqrt{B}$ khi $x=5+2\sqrt{3}$.

Câu 2. Hai người thợ cùng làm một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ, người thứ hai làm trong 6 giờ thì cả hai người làm được $\dfrac{3}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình công việc đó thì mấy giờ xong.

Câu 3. Cho nửa đường tròn đường tròn đường kính AB. K là điểm chính giữa của cung AB. Trên cung KB lấy điểm M (M khác K và B). Trên tia AM lấy điểm N sao cho $AN=BM$. Kẻ dây BP song song với KM. Gọi Q là giao điểm của đường thẳng AP và BM.

1. So sánh tam giác AKN và tam giác BKM.
2. Chứng minh tam giác KMN vuông cân.
3. Tứ giác $AKNP$ là hình gì? Tại sao?
4. Gọi R, S lần lượt là giao điểm thứ hai của QA và QB với đường tròn ngoại tiếp tam giác OMP, chứng minh khi M di động trên cung KB thì trung điểm I của RS luôn nằm trên đường tròn cố định.

Câu 4. Giải phương trình: $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{2+\sqrt{x}}{2x}$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

6 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1993 - 1994

Câu 1. Cho biểu thức $M = \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x}+1} + \dfrac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-1} - 1\right) : \left(1 + \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x}+1} - \dfrac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-1}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức M.

2. Tính M khi $x = \dfrac{1}{2}\left(3+2\sqrt{2}\right)$.

Câu 2. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước và chảy đầy bể trong 4 giờ 48 phút. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất có thể chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai 1 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi sẽ chảy đầy bể trong bao lâu?

Câu 3. Cho hai đường tròn $\left(O_1\right)$ và $\left(O_2\right)$ tiếp xúc ngoài nhau tại A và tiếp chung Ax. Một đường thẳng d tiếp xúc với $\left(O_1\right)$, $\left(O_2\right)$ lần lượt tại các điểm B, C và cắt Ax. Kẻ đường kính BO_1D, CO_2E.

1. Chứng minh rằng M là trung điểm của BC.

2. Chứng minh tam giác O_1MO_2 vuông.

3. Chứng minh ba điểm B, A, E thẳng hàng và ba điểm C, A, D thẳng hàng.

4. Gọi I là trung điểm của DE. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác IO_1O_2 tiếp xúc ngoài với đường thẳng BC.

Câu 4. Tìm m để hệ phương trình sau đây có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 - \left(2m-3\right)x + 6 = 0 \\ 2x^2 + x + \left(m-5\right) = 0 \end{cases}$$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

7 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1994 - 1995

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{2a+1}{\sqrt{a^3}-1} - \dfrac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}\right) \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{a^3}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Xét dấu của biểu thức $P \cdot \sqrt{1-a}$.

Câu 2. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một ca nô xuôi từ A đến B với vận tốc 30 km/h, sau đó lại ngược từ B về A. Thời gian xuôi ít hơn thời gian ngược 1 giờ 20 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B biết rằng vận tốc dòng nước là 5 km/h và vận tốc riêng của ca nô khi xuôi dòng và ngược dòng là bằng nhau.

Câu 3. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$), một cung tròn BC nằm trong tam giác ABC và tiếp xúc với AB, AC tại B và C. Trên cung BC lấy một điểm M rồi hạ đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, CA, AB. Gọi P là giao điểm của BM, IK và Q là giao điểm của MC và IH.

1. Chứng minh rằng các tứ giác $BIMK$, $CIMH$ nội tiếp đường tròn.
2. Chứng minh tia đối của tia MI là phân giác của góc $\widehat{HMK}$.
3. Chứng minh tứ giác $MPIQ$ nội tiếp đường tròn và $PQ \parallel BC$.
4. Gọi (O_1) là đường tròn đi qua ba điểm M, P, K, (O_2) là đường tròn đi qua ba điểm M, Q, H; N là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2) và D là trung điểm của BC. Chứng minh ba điểm M, N, D thẳng hàng.

Câu 4. Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn phương trình sau: $5x - 2\sqrt{x}(2+y) + y^2 + 1 = 0$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

8 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1995 - 1996

A. Lý thuyết Học sinh chọn 1 trong 2 đề:

Đề 1: Phát biểu định nghĩa và nêu các tính chất của hàm số bậc nhất. Trong hai hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số bậc nhất? Vì sao?

$$y = 1 - 2x\ ; \qquad y = x + \frac{1}{x}$$

Đề 2: Phát biểu dấu hiệu nhận biết hình bình hành.

B. Bài tập bắt buộc

Câu 1. Cho biểu thức $B = \left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \dfrac{8\sqrt{a}}{a-1}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{a}-a-3}{a-1} - \dfrac{1}{\sqrt{a}-1}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức B.
2. So sánh B với 1.

Câu 2. Giải bài toán bằng cách lập phương trình
Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể, thì sau 6 giờ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy 20 phút và vòi thứ hai chảy 30 phút thì được $\dfrac{1}{6}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì phải bao lâu mới đầy bể?

Câu 3. Cho nửa đường tròn đường kính AB và hai điểm C, D tuộc nửa đường tròn sao cho cung $AC < 90^\circ$ và góc $\widehat{COD} = 90^\circ$. Gọi M là một điểm trên nửa đường tròn, sao cho C là điểm chính giữa cung AM. Các dây AM và BM cắt OC, OD lần lượt tại E, F.

1. Chứng minh tứ giác $OEMF$ là hình gì? Tại sao?
2. Chứng minh D là điểm chính giữa cung MB.
3. Đường thẳng d tiếp xúc với nửa đường tròn tại M và cắt các tia OC, OD lần lượt tại I và K. Chứng minh rằng tứ giác $OBKM$ và $OAIM$ nội tiếp đường tròn.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

9 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1995 - 1996

Câu 1. Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2}-\dfrac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tìm giá trị của a để $A>\dfrac{1}{6}$.

Câu 2. Cho phương trình $x^2-2\big(m+2\big)x+m+1=0$ (x là ẩn số).

1. Giải phương trình khi $m=-\dfrac{3}{2}$.
2. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.
3. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị của m để $x_1\big(1-2x_2\big)+x_2\big(1-2x_1\big)=m^2$.

Câu 3. Cho tam giác ABC ($AB>AC$ và $\widehat{BAC}>90^\circ$). Gọi I, K theo thứ tự các trung điểm AB, AC. Các đường tròn đường kính AB, AC cắt nhau tại điểm thứ hai D; tia BA cắt đường tròn $\big(K\big)$ tại điểm thứ hai E, tia CA cắt đường tròn $\big(I\big)$ tại điểm thứ hai F.

1. Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng.
2. Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp.
3. Chứng minh ba đường thẳng AD, BF, CE đồng quy.
4. Gọi H là giao điểm thứ hai của tia DF với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Hãy so sánh độ dài các đoạn thẳng DH, DE.

Câu 4. Cho hai phương trình bậc hai

$$ax^2+bx+c=0\ ;\qquad cx^2+bx+a=0$$

Tìm hệ thức giữa a, b, c là điều kiện cần và đủ hai phương trình trên có một nghiệm chung duy nhất.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

10 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1996 - 1997

A. Lý thuyết *(2,0 điểm)*

Học sinh chọn 1 trong 2 đề:

Đề 1: Hãy chứng minh công thức $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ với $a \geq 0$ và $b > 0$.

Đề 2: Định nghĩa đường tròn. Chứng minh rằng đường kính là dây cung lớn nhất của đường tròn.

B. Bài tập bắt buộc *(8 điểm)*

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức $P = \dfrac{2a+4}{a\sqrt{a}-1} + \dfrac{\sqrt{a}+2}{a+\sqrt{a}+1} - \dfrac{2}{\sqrt{a}-1}$.

1. Rút gọn biểu thức P.

2. Tính giá trị của P khi $a = 3 - 2\sqrt{2}$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một người dự định sản xuất 120 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do tăng năng suất 4 sản phẩm mỗi giờ, nên hoàn thành sớm hơn dự định 1 giờ. Hãy tính năng suất dự kiện của người đó.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung AB $(AB < 2R)$. Trên tia AB lấy điểm C sao cho $AC > AB$. Từ điểm C kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn tại P, K. Gọi I là trung điểm AB.

1. Chứng minh tứ giác $CPIK$ nội tiếp đường tròn.

2. Chứng minh tam giác ACP và tam giác PCB đồng dạng và $CP^2 = CB \cdot CA$.

3. Gọi H là trực tâm của tam giác CPK. Hãy tính PH theo R.

4. Giả sử $PA \parallel CK$, chứng minh rằng tia đối của tia BK là tia phân giác góc $\widehat{CBP}$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

11 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1996 - 1997

Câu 1. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2}{x-1}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Với giá trị của x thì A đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 2. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau $120\,\text{km}$ với vận tốc định trước. Sau khi đi được $\dfrac{1}{3}$ quãng đường AB người đó tăng vận tốc lên $10\,\text{km/h}$ trên con đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian lăn bánh trên đường, biết người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

Câu 3. Cho đường tròn tâm (O) bán kính R và một dây BC cố định. Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Lấy điểm M trên cung nhỏ AC, kẻ tia Bx vuông góc với tia MA ở I và cắt tia CM tại D.

1. Chứng minh góc $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ và MA là tia phân giác góc $\widehat{BMD}$.

2. Chứng minh A là là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và góc $\widehat{BDC}$ có độ lớn không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

3. Tia DA cắt tia BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F, chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF.

4. Chứng minh $AE \cdot AF$ không đổi khi M di động. Tính $AE \cdot AF$ theo R và $\widehat{ABC} = \alpha$.

Câu 4. Cho hai bất phương trình

$$3mx - 2m > x + 1\ ; \qquad m - 2x < 0$$

Tìm m để hai bất phương trình trên có cùng tập hợp nghiệm.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

12 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1997 - 1998

A. Lý thuyết *(2,0 điểm)*

Học sinh chọn 1 trong 2 đề:

Đề 1: Định nghĩa căn bậc hai số học và chứng minh công thức $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ với $a \geq 0$ và $b \geq 0$.

Đề 2: Nêu các dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp đường tròn.

B. Bài tập bắt buộc *(8 điểm)*

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \dfrac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tìm giá trị của a để $A > \dfrac{1}{6}$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một ô tô dự định đi từ tỉnh A đến tỉnh B với vận tốc 48 km/h. Sau khi đi một giờ ô tô bị chắn đường bởi xe hỏa 10 phút. Do đó, để đến tỉnh B đúng hạn, xe phải tăng tốc thêm 6 km/h. Tính quãng đường AB.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

Cho đường tròn $(O; R)$, một dây CD có trung điểm H. Trên tia đối của tia DC lấy một điểm S và qua S kẻ các tiếp tuyến SA, SB với đường tròn. Đường thẳng AB cắt đường thẳng SO; OH lần lượt tại E và F.

1. Chứng minh tứ giác $SEHF$ nội tiếp đường tròn.
2. Chứng minh $OE \cdot OS = R^2$
3. Chứng minh $OH \cdot OF = OE \cdot OS$.
4. Khi S di động trên tia đối của tia DC hãy chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

13 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1997 - 1998

Câu 1. Cho biểu thức $A = \sqrt{x} : \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} + \dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1} \right)$.

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tìm x để $A = 7$.

Câu 2. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một công nhân dự định tính làm 72 sản phẩm trong một thời gian đã định. Nhưng trong thực tế xí nghiệp giao làm 80 sản phẩm. Vì vậy, mặc dù người đó đã làm thêm mỗi giờ 1 sản phẩm song thời gian hoàn thành công việc vẫn tăng so với dự định 12 phút. Tính năng suất dự kiến, biết rằng mỗi giờ đó làm không quá 20 sản phẩm.

Câu 3. Cho đường tròn tâm O bán kính R, một dây AB cố định ($AB < 2R$) và một điểm M tùy ý trên cung lớn AB (M khác A và B). Gọi I là trung điểm của dây SAB và $\left(O'\right)$ là đường tròn đi qua M và tiếp xúc với AB tại A. Đường thẳng MI cắt $\left(O\right)$, $\left(O'\right)$ lần lượt tại giao điểm thứ hai là N, P.

1. Chứng minh $IA^2 = IP \cdot IM$.
2. Chứng minh tứ giác $ANBP$ là hình bình hành.
3. Chứng minh IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMP.
4. Chứng minh khi M di chuyển thì trọng tâm G của tam giác PAB chạy trên một cung tròn cố định.

Câu 4. Trong hệ tọa độ Oxy, cho parabol $\left(P\right) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = x + m$. Tìm m để (d) cắt hai nhánh của $\left(P\right)$ tại A và B sao cho tam giác AOB vuông tại O.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

14 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1998 - 1999

A. Lý thuyết *(2,0 điểm)*

Học sinh chọn 1 trong 2 đề:

Đề 1: Phát biểu tính chất cơ bản của phân thức đại số. Các đẳng thức sau đúng hay sai? Vì sao?

$$\frac{3\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=3\ ;\qquad \frac{5m-25}{15-5m}=\frac{m-5}{m-3}$$

.

Đề 2: Chứng minh rằng nếu cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác vuông này tỉ lệ với các cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

B. Bài tập bắt buộc *(8 điểm)*

Câu 1. *(2,5 điểm)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(1-\dfrac{x+4}{x+\sqrt{x}+1}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên dương.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một người dự định đi xe đạp từ A đến B cách nhau 36 km trong thời gian nhất định. Sau khi đi được nửa quãng đường người đó dừng lại nghỉ 18 phút. Do đó để đến B đúng hẹn người đó đã tăng vận tốc thêm 2 km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu và thời gian xe lăn bánh trên đường.

Câu 3. *(3,5 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn đường kính AH cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F.

1. Chứng minh tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật.
2. Chứng minh $AE\cdot AB=AF\cdot AC$.
3. Đường thẳng qua A vuông góc với EF cắt cạnh BC tại I. Chứng minh I là trung điểm của BC.
4. Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC gấp đôi diện tích hình chữ nhật $AEHF$ thì tam giác ABC vuông cân.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

15 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1999 - 2000

A. Lý thuyết *(2,0 điểm)*

Học sinh chọn 1 trong 2 đề:

Đề 1: Phát biểu hai quy tắc đổi dấu của phân thức. Viết công thức minh họa cho trong quy tắc. Áp dụng thực hiện phép tính:

$$\frac{2a^2}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{b-a}$$

.

Đề 2: Phát biểu định lý về góc nội tiếp của đường tròn. Chứng minh định lý trong trường hợp tâm O nằm trên một cạnh của góc.

B. Bài tập bắt buộc *(8 điểm)*

Câu 1. *(2,5 điểm)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{2}{x-1}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tìm các giá trị của x để $P>0$.
3. Tìm các số m để có các giá trị của x thỏa mãn $P\cdot\sqrt{x}=m-\sqrt{x}$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một xe tải và một xe con cùng khởi hành từ A đến B. Xe tải đi với vận tốc 40 km/h, xe con đi với vận tốc 60 km/h. Sau khi mỗi xe đi được nửa đường thì xe con nghỉ 40 phút rồi chạy tiếp đến B; xe tải trên quãng còn lại đã tăng vận tốc thêm 10 km/h nhưng vẫn đến B chậm hơn xe con nửa giờ. Hãy tính quãng đường AB.

Câu 3. *(3,5 điểm)*

Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN với đường tròn (B, C, M, N thuộc đường tròn và $AM<AN$). Gọi I là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với đường tròn (E là trung điểm của MN).

1. Chứng minh bốn điểm A, O, E, C cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh góc $\widehat{AOC}=\widehat{BIC}$.
3. Chứng minh $BI\parallel MN$.
4. Xác định vị trí cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

16 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2000 - 2001

A. Lý thuyết *(2,0 điểm)*

Học sinh chọn 1 trong 2 đề:

Đề 1: Thế nào là phép thử mẫu của biểu thức lấy căn. Viết công thức tổng quát. Áp dụng tính:

$$\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$$

.

Đề 2: Phát biểu định lý về góc có đỉnh bên trong đường tròn.

B. Bài tập bắt buộc *(8 điểm)*

Câu 1. *(2,5 điểm)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}+\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tìm giá trị của P biết $x=6-2\sqrt{5}$.
3. Tìm các giá trị của n để có x thỏa mãn $P\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)>\sqrt{x}+n$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một ca nô chạy trên sông trong 8 giờ, xuôi dòng 81 km, ngược dòng 105 km. Một lần khác cũng chạy trên khúc sông đó ca nô này chạy trong 4 giờ, xuôi dòng 54 km và ngược dòng 42 km. Hãy tính vận tốc khi xuôi dòng và ngược dòng của ca nô, biết vận tốc dòng nước và vận tốc riêng của ca nô không đổi.

Câu 3. *(3,5 điểm)*

Cho đường tròn $\left(O\right)$ đường kính $AB=2R$, dây MN vuông góc với dây AB tại I sao cho $IA<IB$. Trên đoạn MI lấy điểm E (E khác M và I). Tia AE cắt với đường tròn tại điểm thứ hai K.

1. Chứng minh tứ giác $IEKB$ nội tiếp đường tròn.
2. Chứng minh tam giác AME và tam giác AKM đồng dạng và $AM^2=AE\cdot AK$.
3. Chứng minh $AE\cdot AK+BI\cdot BA=4R^2$.
4. Xác định vị trí điểm I sao cho chu vi tam giác MIO đạt giá trị lớn nhất.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

17 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2002 - 2003

A. Lý thuyết *(2,0 điểm)*

Học sinh chọn 1 trong 2 đề:

Đề 1: Phát biểu định nghĩa và nêu tính chất của hàm số bậc nhất. Áp dụng cho hai hàm số bậc nhất $y = 0,2x - 7$ và $y = 5 - 6x$. Hỏi hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến? Vì sao?

Đề 2: Nêu dấu hiện nhận biết tứ giác nội tiếp đường tròn.

B. Bài tập bắt buộc *(8 điểm)*

Câu 1. *(2,5 điểm)*

Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \dfrac{x+2}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}-4}{1-x}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tìm giá trị của x để $P < 0$.
3. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một công nhân dự định làm 150 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Sau khi làm được 2 giờ với năng suất dự kiến, người đó cải tiến các thao tác nên đã tăng năng suất được 2 sản phẩm mỗi giờ vì vậy đã hoàn thành 150 sản phẩm sớm hơn dự kiến 30 phút. Hãy tính năng suất dự kiến ban đầu.

Câu 3. *(3,5 điểm)*

Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định và một đường kính EF bất kỳ (E khác A và B). Tiếp tuyến tại B với đường tròn cắt các tia AE, AF lần lượt tại H và K. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với EF cắt HK tại M.

1. Chứng minh tứ giác $AEBF$ là hình chữ nhật.
2. Chứng minh tứ giác $EFKH$ nội tiếp đường tròn.
3. Chứng minh AM là trung tuyến của tam giác AHK.
4. Gọi P, Q là trung điểm tương ứng của BH, BK, xác định vị trí của đường kính EF để tứ giác $EFQP$ có chu vi nhỏ nhất.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

18 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2003 - 2004

A. Lý thuyết *(2,5 điểm)*

Học sinh chọn 1 trong 2 đề:

Đề 1: Phát biểu và viết dạng tổng quát của quy tắc khai phương một tích. Áp dụng: $P = \dfrac{\sqrt{50} - \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$.

Đề 2: Định nghĩ đường tròn. Chứng minh rằng đường kính là dây lớn nhất của đường tròn.

B. Bài tập bắt buộc *(8 điểm)*

Câu 1. *(2,5 điểm)*

Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \dfrac{8x}{4-x}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tìm giá trị của x để $P = -1$.
3. Tìm m để với mọi giá trị của $x > 9$ ta có $m\left(\sqrt{x} - 3\right) \cdot P > x + 1$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Theo kế hoạch, hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18%, tổ II vượt mức 21%, vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch?

Câu 3. *(3,5 điểm)*

Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định, một điểm I nằm giữa A và O sao cho $AI = \dfrac{2}{3}AO$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I. Gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN (C không trùng với M, N và B). Nối AC cắt MN tại E.

1. Chứng minh bốn điểm C, O, H, N thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh tứ giác $IECB$ nội tiếp được trong đường tròn.
3. Chứng minh tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM và $AM^2 = AE \cdot AC$.
4. Chứng minh $AE \cdot AC - AI \cdot IB = AI^2$.
5. Hãy xác định của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

19 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2004 - 2005

A. Lý thuyết *(2,5 điểm)*

Học sinh chọn 1 trong 2 đề:

Đề 1: Định nghĩa phương trình bậc nhất hai ẩn số và nghiệm của nó. Hãy tìm nghiệm chung của hai phương trình: $x + 4y = 3$ và $x - 3y = -4$.

Đề 2: Phát biểu và chứng minh định lý góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn. Chứng minh định lý trong trường hợp hai cạnh của góc cắt đường tròn.

B. Bài tập bắt buộc *(8 điểm)*

Câu 1. *(2,5 điểm)*

Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tìm giá trị của P khi $x = \dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$.
3. Tìm các giá trị của x thỏa mãn $P \cdot \sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ hai bị điều đi làm việc khác, tổ một đã hoàn thành nốt công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc.

Câu 3. *(3,5 điểm)*

Cho đường tròn $(O; R)$, đường thẳng d không đi qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Từ một điểm C trên d (C nằm ngoài đường tròn), kẻ hai tiếp tuyến CM, CN tới đường tròn (M, N thuộc (O)). Gọi H là trung điểm của AB, đường thẳng OH cắt tia CN tại K.

1. Chứng minh bốn điểm C, O, H, N thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh $KN \cdot KC = KH \cdot KO$.
3. Đoạn thẳng CO cắt đường tròn (O) tại I, chứng minh I cách đều CM, CN, MN.
4. Một đường thẳng đi qua O và song song với MN cắt các tia CM, CN lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của điểm C trên d sao cho diện tích tam giác CEF nhỏ nhất.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

20 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2005 - 2006

A. Lý thuyết *(2,5 điểm)*

Học sinh chọn 1 trong 2 đề:

Đề 1: Nêu điều kiện để $\sqrt{A}$ có nghĩa.

Áp dụng: Với giá trị nào của x thì $\sqrt{2x-1}$ có nghĩa.

Đề 2: Phát biểu và chứng minh định lý góc có đỉnh ở bên trong đường tròn.

B. Bài tập bắt buộc *(8 điểm)*

Câu 1. *(2,5 điểm)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{5\sqrt{x}-4}{2\sqrt{x}-x}\right):\left(\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tìm giá trị của P khi $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.
3. Tìm m để có x thỏa mãn $P=mx\sqrt{x}-2mx+1$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Theo kế hoạch, một đội công nhân phải hoàn thành 60 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng do cải tiến kỹ thuật nên mỗi giờ mỗi người công nhân đó đã làm thêm 2 sản phẩm. Vì vậy, chẳng những đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn dự định 30 phút mà còn vượt mức 3 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, mỗi giờ người công nhân đó phải làm bao nhiêu sản phẩm?

Câu 3. *(3,5 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy điểm M tùy ý giữa A và B. Đường tròn đường kính BM cắt đường thẳng BC tại điểm thứ hai là E. Các đường thẳng CM, AE lần lượt cắt đường tròn tại các điểm thứ hai là H và K.

1. Chứng minh rằng tứ giác $AMEC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $\widehat{ACM}=\widehat{KHM}$ theo R.
3. Chứng minh các đường thẳng BH, EM và AC đồng quy.
4. Giả sử $AC<AB$, hãy xác định vị trí của M để tứ giác $AHBC$ là hình thang cân.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

21 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2006 - 2007

Câu 1. *(2,5 điểm)*

Cho biểu thức $P=\left[\dfrac{a+3\sqrt{a}+2}{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}-\dfrac{a+\sqrt{a}}{a-1}\right]:\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức P.

2. Tìm giá trị của a để $\dfrac{1}{P}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{8}\geq 1$.

Câu 2. *(2,5 điểm)*

Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một ca nô xuôi dòng trên một khúc sông từ bến A đến bến B dài $80\,\text{km}$, sau đó lại ngược dòng đến địa điểm C cách bến B $72\,\text{km}$. Thời gian ca nô xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng là 15 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô biết vận tốc của dòng nước là $4\,\text{km/h}$.

Câu 3. *(1,0 điểm)*

Tìm tọa độ giao điểm A và B của đồ thị hai hàm số $y=2x+3$ và $y=x^2$. Gọi D và C lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho đường tròn $\left(O\right)$ đường kính $AB=2R$, C là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM, H là giao điểm của AK và MN.

1. Chứng minh rằng $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.

2. Tính tính $AH\cdot AK$ theo R.

3. Xác định vị trí của điểm K để $\left(KM+KN+KB\right)$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện $x+y=2$. Chứng minh: $x^2y^2\left(x^2+y^2\right)\leq 2$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

22 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2007 - 2008

Câu 1. *(2,5 điểm)*
Cho biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{3}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{6\sqrt{x}-4}{x-1}$.

1. Rút gọn P.
2. Tìm giá trị của x để $P < \dfrac{1}{2}$.

Câu 2. *(2,5 điểm)*
Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24 km. Khi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 4 km/h so với lúc đi, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi 30 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B.

Câu 3. *(1,0 điểm)*
Cho phương trình $x^2 + bx + c = 0$.

1. Giải phương trình khi $b = -3$, $c = 2$.
2. Tìm b, c để phương trình có hai nghiệm phân biệt và tích của chúng bằng 1.

Câu 4. *(3,5 điểm)*
Cho đường tròn $(O; R)$ tiếp xúc với đường thẳng d tại A. Trên đường thẳng d lấy điểm H (H khác A) và $AH < R$. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với d cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt E, B (E nằm giữa B và H).

1. Chứng minh $\widehat{ABE} = \widehat{EAH}$ và tam giác ABH đồng dạng với tam giác EAH.
2. Lấy điểm C trên đường thẳng d sao cho H là trung điểm của AC, đường thẳng CE cắt AB tại K. Chứng minh tứ giác $AHEK$ nội tiếp.
3. Xác định vị trí của điểm H để $AB = R\sqrt{3}$.

Câu 5. *(0,5 điểm)*
Cho đường thẳng $y = (m-1)x + 2$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O tới đường thẳng đó lớn nhất.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

23 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2008 - 2009

Câu 1. *(2,5 điểm)*
Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$.

1. Rút gọn P.
2. Tính giá trị của P khi $x = 4$.
3. Tìm giá trị của x để $P = \dfrac{13}{3}$.

Câu 2. *(2,5 điểm)*
Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai tổ I vượt mức 15% và tổ II vượt mức 10% so với tháng thứ nhất, vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

Câu 3. *(1,0 điểm)*
Cho parabol $\left(P\right) : y = \dfrac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d) : y = mx + 1$.

1. Chứng minh với mọi giá trị của m đường thẳng (d) luôn cắt parabol $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt A, B.
2. Tính diện tích tam giác AOB theo m (O là gốc tọa độ).

Câu 4. *(3,5 điểm)*
Cho đường tròn $\left(O\right)$ có đường kính $AB = 2R$ và E là điểm bất kỳ trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn AB tại F và cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại điểm thứ hai K.

1. Chứng minh tam giác KAF đồng dạng với tam giác KEA.
2. Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE. Chứng minh đường tròn $\left(I\right)$ bán mính IE tiếp xúc với đường tròn $\left(O\right)$ tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.
3. Chứng minh $MN \parallel AB$, trong đó M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn $\left(I\right)$.
4. Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác KPQ theo R khi E chuyển động trên đường tròn $\left(O\right)$, với P là giao điểm của NF và AK, Q là giao điểm của MF và BK.

Câu 5. *(0,5 điểm)*
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \left(x-1\right)^4 + \left(x-3\right)^4 + 6\left(x-1\right)^2\left(x-3\right)^2$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

24 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2009 - 2010

Câu 1. *(2,5 điểm)*
Cho biểu thức $A = \dfrac{x}{x-4} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$, với $x \geq 0$, $x \neq 4$.

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
3. Tìm giá trị của x để $A = -\dfrac{1}{3}$.

Câu 2. *(2,5 điểm)*
Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Hai tổ sản xuất cùng may một loại áo. Nếu tổ thứ nhất may trong 3 ngày, tổ thứ hai may trong 5 ngày thì cả hai tổ may được 1310 chiếc áo. Biết rằng trong mỗi ngày tổ thứ nhất may được nhiều hơn tổ thứ hai 10 chiếc áo. Hỏi mỗi tổ may trong một ngày được bao nhiêu chiếc áo?

Câu 3. *(1,0 điểm)*
Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$ (x là ẩn).

1. Giải phương trình đã cho với $m = 1$.
2. Tìm các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Câu 4. *(3,5 điểm)*
Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm).

1. Chứng minh tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh BE vuông góc với OA và $OE \cdot OA = R^2$.
3. Trên cung nhỏ BC của đường tròn $(O; R)$ lấy điểm K bất kỳ (K khác B và C). Tiếp tuyến tại K của đường tròn $(O; R)$ cắt AB, AC theo thứ tự tại các điểm P và Q. Chứng minh tam giác APQ có chu vi không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC.
4. Đường thẳng qua O, vuông góc với OA cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại các điểm M, N. Chứng minh $PM + QN \geq MN$.

Câu 5. *(0,5 điểm)*
Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - \dfrac{1}{4} + \sqrt{x^2 + x + \dfrac{1}{4}}} = \dfrac{1}{2}(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

25 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2010 - 2011

Câu 1. *(2,5 điểm)*
Cho $P = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{3x+9}{x-9}$, với $x \geq 0$, $x \neq 9$.

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tính giá trị của x để $P = \dfrac{1}{3}$.
3. Tìm giá trị lớn nhất của P.

Câu 2. *(2,5 điểm)*
Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Một mảnh vườn hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m và chiều dài lớn hơn chiều rộng là 7 m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó?

Câu 3. *(1,0 điểm)*
Cho parabol $\left(P\right): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - 1$.

1. Chứng minh với mọi m thì (d) luôn cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt.
2. Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và $\left(P\right)$. Tìm giá trị của m để
$$x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - x_1x_2 = 3$$

Câu 4. *(3,5 điểm)*
Cho đường tròn $\left(O; R\right)$, đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A và B), D thuộc dây BC (D khác B và C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại E, tia AC cắt BE tại F.

1. Chứng minh tứ giác $FCDE$ nội tiếp.
2. Chứng minh $DA \cdot DE = DB \cdot DC$.
3. Chứng minh $\widehat{CFD} = \widehat{OCD}$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$, chứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O\right)$.
4. Cho biết $DF = R$, chứng minh $\tan\widehat{AFB} = 2$.

Câu 5. *(0,5 điểm)*
Giải phương trình $x^2 + 4x + 7 = \left(x+4\right)\sqrt{x^2+7}$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

26 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2011 - 2012

Câu 1. *(2,5 điểm)*
Cho $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \dfrac{10\sqrt{x}}{x-25} - \dfrac{5}{\sqrt{x}+5}$, với $x \geq 0$, $x \neq 25$.

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tính giá trị của A khi $x = 9$.
3. Tìm x để $A < \dfrac{1}{3}$.

Câu 2. *(2,5 điểm)*
Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Một đội xe theo kế hoạch chở hết 140 tấn hàng trong một số này quy định. Do mỗi mày đội đó chở vượt mức 5 tấn nên đội đã hoàn thành sớm hơn thời gian quy định 1 ngày và chở thêm được 10 tấn. Hỏi theo kế hoạch đội xe chở hàng hết bao nhiêu ngày?

Câu 3. *(1,0 điểm)*
Cho parabol $\left(P\right): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x - m^2 + 9$.

1. Tìm tọa độ giao điểm của parabol $\left(P\right)$ và đường thẳng (d) khi $m = 1$.
2. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol $\left(P\right)$ tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

Câu 4. *(3,5 điểm)*
Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Gọi d_1 và d_2 lần lượt là hai tiếp tuyến của đường tròn $\left(O\right)$ tại hai điểm A và B. Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc đường tròn $\left(O\right)$ (E không trùng với A và B). Đường thẳng d đi qua điểm E và vuông góc với EI cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại M, N.

1. Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ và $\widehat{MIN} = 90^\circ$.
3. Chứng minh $AM \cdot BN = AI \cdot BI$.
4. Gọi F là điểm chính giữa cung AB không chứa E của đường tròn $\left(O\right)$. Hãy tính diện tích của tam giác MIN theo R khi ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Câu 5. *(0,5 điểm)*
Với $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 4x^2 - 3x + \dfrac{1}{4x} + 2011$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

27 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2012 - 2013

Câu 1. *(2,5 điểm)*

1. Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của biểu thức khi $x = 36$.

2. Rút gọn biểu thức $B = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \dfrac{4}{\sqrt{x}-4}\right) : \dfrac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0$, $x \neq 16$).

3. Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $B \cdot \left(A-1\right)$ là số nguyên.

Câu 2. *(2,0 điểm)*
Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Hai người cùng làm chung một công việc trong $\dfrac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc?

Câu 3. *(1,5 điểm)*

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 2 \\ \dfrac{6}{x} - \dfrac{2}{y} = 1 \end{cases}$

2. Cho phương trình $x^2 - \left(4m-1\right)x + 3m^2 - 2m = 0$ (ẩn x). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 7$.

Câu 4. *(3,5 điểm)*
Cho đường tròn $\left(O; R\right)$ có đường kính AB. Bán kính CO vuông góc với AB, M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC (M khác A và M khác C), BM cắt AC tại H. Gọi K là hình chiếu của H trên AB.

1. Chứng minh tứ giác $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$.

3. Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C.

4. Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn tại $\left(O\right)$ tại điểm A. Cho P là một điểm nằm trên d sao cho hai điểm P, C nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và $\dfrac{AP \cdot MB}{MA} = R$. Chứng minh đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK.

Câu 5. *(0,5 điểm)*
Với x, y là các số dương thỏa mãn điều kiện $x \geq 2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

28 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2013 - 2014

Câu 1. *(2,0 điểm)*
Với $x > 0$, cho hai biểu thức $A = \dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$.

1. Tính giá trị biểu thức A khi $x = 64$.
2. Rút gọn biểu thức B.
3. Tính x để $\dfrac{A}{B} > \dfrac{3}{2}$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*
Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Quãng đường từ A đến B dài 90 km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9 km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3(x+1) + 2(x+2y) = 4 \\ 4(x+1) - 2(x+2y) = 9 \end{cases}$
2. Cho parabol $(P): y = \dfrac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - \dfrac{1}{2}m^2 + m + 1$.
   a) Với $m = 1$, xác định tọa độ giao điểm của A, B của (d) và (P).
   b) Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

Câu 4. *(3,5 điểm)*
Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C ($AB < AC$, d không đi qua tâm O).

1. Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp.
2. Chứng minh $AN^2 = AB \cdot AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi $AB = 4$ cm, $AN = 6$ cm.
3. Gọi I là trung điểm BC. Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh $MT \parallel AC$.
4. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại K. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi và thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu 5. *(0,5 điểm)*
Với a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c + ab + bc + ca = 6abc$. Chứng minh: $M = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \geq 3$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

29 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2014 - 2015

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ khi $x = 9$.
2. Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, với $x > 0$, $x \neq 1$.

   a) Chứng minh rằng $P = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

   b) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*
Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Một phân xưởng theo kế hoạch phải sản xuất 1100 sản phẩm trong một số ngày quy định. Do mỗi ngày phân xưởng đó sản xuất vượt mức 5 sản phẩm nên phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn thời gian quy định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y} + \dfrac{1}{y-1} = 5 \\ \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{2}{y-1} = -1 \end{cases}$
2. Trên mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng $(d): y = -x + 6$ và parabol $\left(P\right): y = x^2$.

   a) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và $\left(P\right)$.

   b) Gọi A, B là giao điểm của (d) và $\left(P\right)$. Tính diện tích của tam giác AOB.

Câu 4. *(3,5 điểm)*
Cho đường tròn $\left(O;R\right)$ có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn $\left(O;R\right)$ (M khác A, M khác B). Tiếp tuyến của đường tròn $\left(O;R\right)$ cắt các đường thẳng AM, AN lần lượt tại các điểm Q, P.

1. Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.
2. Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.
3. Gọi E là trung điểm của BQ. Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại F. Chứng minh F là trung điểm của BP và $ME \parallel NF$.
4. Khi đường kính MN quay quanh tâm O và thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính MN để tứ giác $MNPQ$ có diện tích nhỏ nhất.

Câu 5. *(0,5 điểm)*
Với a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = \sqrt{2a+bc} + \sqrt{2b+ca} + \sqrt{2c+ab}$$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

30 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2015 - 2016

Câu 1. *(2,0 điểm)*
Cho hai biểu thức $P = \dfrac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $Q = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$, với $x > 0$, $x \neq 4$.

1. Tính giá trị biểu thức P khi $x = 9$.
2. Rút gọn biểu thức Q.
3. Tìm giá trị của x để $\dfrac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2. *(2,0 điểm)*
Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60 km, sau đó chạy xuôi dòng 48 km trên cùng một dòng sông có vận tốc của dòng nước là 2 km/giờ. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x+y) + \sqrt{x+1} = 4 \\ (x+y) - 3\sqrt{x+1} = -5 \end{cases}$
2. Cho phương trình $x^2 - (m+5)x + 3m + 6 = 0$ (x là ẩn số).

   a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi số thực m.

   b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5.

Câu 4. *(3,5 điểm)*
Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn AO (C khác A, C khác O). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại tại K. Gọi M là điểm bất kì trên cung KB (M khác K, M khác B). Đường thẳng CK cắt các đường thẳng AM, BM lần lượt tại H và D. Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai N.

1. Chứng minh tứ giác $ACMD$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $CA \cdot CB = CH \cdot CD$.
3. Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của đường tròn đi qua trung điểm của DH.
4. Khi M di động trên cung KB, chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. *(0,5 điểm)*
Với các số thực không âm a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4$.
Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \dfrac{ab}{a+b+2}$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

31 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2016 - 2017

Câu 1. *(2,0 điểm)*
Cho hai biểu thức $A = \dfrac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \dfrac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$, với $x \geq 0$, $x \neq 9$.

1. Tính giá trị biểu thức A khi $x = 25$.
2. Chứng minh rằng $B = \dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.
3. Tìm x để biểu thức $P = A \cdot B$ có giá trị là số nguyên.

Câu 2. *(2,0 điểm)*
Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích $720\,\mathrm{m}^2$. Nếu tăng chiều dài thêm $10\,\mathrm{m}$ và giảm chiều rộng $6\,\mathrm{m}$ thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3x}{x-1} - \dfrac{2}{y+2} = 4 \\ \dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{1}{y+2} = 5 \end{cases}$
2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = 3x + m^2 - 1$ và parabol $\big(P\big): y = x^2$.
   a) Chứng minh (d) luôn cắt $\big(P\big)$ tại hai điểm phân biệt với mọi m.
   b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và $\big(P\big)$. Tìm m để $\big(x_1+1\big)\big(x_2+1\big) = 1$.

Câu 4. *(3,5 điểm)*
Cho đường tròn $\big(O\big)$ và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn $\big(O\big)$ (B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn OC lấy điểm I (I khác C, I khác O). Đường thẳng AI kéo dài cắt $\big(O\big)$ tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm đoạn DE.

1. Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{BE}$.
3. Đường thẳng d đi qua điểm E song song với OA, d cắt BC tại điểm K. Chứng minh HK song song với DC.
4. Tia CD cắt AO tại P, tia EO cắt BP tại F. Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật.

Câu 5. *(0,5 điểm)*
Với các số thực x, y thỏa mãn $x - \sqrt{x+6} = \sqrt{y+6} - y$.
Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

32 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2017 - 2018

Câu 1. *(2,0 điểm)*
Cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \dfrac{3}{\sqrt{x}+5} + \dfrac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$, với $x \geq 0$, $x \neq 25$.

1. Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$.
2. Chứng minh rằng $B = \dfrac{1}{\sqrt{x}-5}$.
3. Tìm tất cả các giá trị của x để $A = B \cdot \left|x-4\right|$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*
Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Một xe ôtô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc của mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài 120 km. Do vận tốc xe ôtô lớn hơn vận tốc xe máy là 10 km/h nên xe ôtô đến B sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} = 5 \\ 4\sqrt{x} - \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$
2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = mx + 5$.

   a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A\big(0;5\big)$ với mọi giá trị của m.

   b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol $\big(P\big): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) sao cho $|x_1| > |x_2|$.

Câu 4. *(3,5 điểm)*
Cho đường tròn $\big(O\big)$ ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I. Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K.

1. Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh $NB^2 = NK \cdot NM$.
3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.
4. Gọi P, Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn $\big(O\big)$. Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Câu 5. *(0,5 điểm)*
Cho các số thực a, b, c thay đổi luôn thỏa mãn: $a \geq 1$, $b \geq 1$, $c \geq 1$ và $ab + bc + ca = 9$.
Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

33 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2018 - 2019

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \dfrac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \dfrac{2}{\sqrt{x}+3}$, với $x \geq 0$, $x \neq 1$.

1. Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$.
2. Chứng minh rằng $B = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.
3. Tìm tất cả các giá trị của x để $\dfrac{A}{B} \geq \dfrac{x}{4} + 5$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28 mét và độ dài đường chéo bằng 10 mét. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó theo đơn vị mét.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x - |y+2| = 3 \\ x + 2\,|y+2| = 3 \end{cases}$
2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $(d)\colon y = (m+2)\,x + 3$ và $\big(P\big)\colon y = x^2$.

a) Chứng minh rằng (d) luôn cắt $\big(P\big)$ tại hai điểm phân biệt

b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt $\big(P\big)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số nguyên.

Câu 4. *(3,5 điểm)*

Cho đường tròn $(O;R)$ với dây cung AB không đi qua tâm. Lấy điểm S là một điểm bất kỳ trên tia đối của tia AB (S khác A). Từ điểm S vẽ hai tiếp tuyến SC, SD với đường tròn $(O;R)$ sao cho điểm C nằm trên cung nhỏ AB (C, D là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB.

1. Chứng minh năm điểm C, D, H, O, S thuộc đường tròn đường kính SO.
2. Khi $SO = 2R$, hãy tính độ dài đoạn thẳng SD theo R và tính số đo $\widehat{CSD}$.
3. Đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng SC, cắt các đoạn thẳng CD tại điểm K. Chứng minh tứ giác $ADHK$ là tứ giác nội tiếp và đường thẳng BK đi qua trung điểm của đoạn thẳng SC.
4. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng BD và F là hình chiếu vuông góc của điểm E trên đường thẳng AD. Chứng minh rằng, khi điểm S thay đổi trên tia đối của tia AB thì điểm F luôn thuộc một đường tròn cố định.

Câu 5. *(0,5 điểm)*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 2\sqrt{x}$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

34 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2019 - 2020

Câu 1. *(2,0 điểm)*
Cho hai biểu thức $A = \dfrac{4\left(\sqrt{x}+1\right)}{25-x}$ và $B = \left(\dfrac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \dfrac{2}{\sqrt{x}+5}\right) : \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$, với $x \geq 0$, $x \neq 25$.

1. Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$.
2. Rút gọn biểu thức B.
3. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A \cdot B$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Câu 2. *(2,5 điểm)*

1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc phương trình:*
   Hai công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 15 ngày làm xong. Nếu đội thứ nhất làm riêng trong 3 ngày rồi dừng lại và đội thứ hai làm tiếp công việc đó trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành được 25% công việc. Hỏi nếu mỗi đội làm riêng thì trong bao nhiêu ngày mới làm xong công việc?
2. Một bồn nước inox có dạng như một hình trụ với chiều cao 1,75 m và diện tích đáy là 0,32 m^2. Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của bồn nước).

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình: $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$
2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $(d)\colon y = 2mx - m^2 + 1$ và $\left(P\right)\colon y = x^2$.
   a) Chứng minh rằng (d) luôn cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt
   b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = -\dfrac{2}{x_1x_2} + 1$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H.

1. Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF.
3. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm I, đường thẳng EF cắt đường thẳng AH lại điểm P. Chứng minh tam giác APE đồng dạng với tam giác AIB và đường thẳng KH song song với đường thẳng IP.

Câu 5. *(0,5 điểm)*
Cho biểu thức $P = a^4 + b^4 - ab$, a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + ab = 3$.
Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức P.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

35 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2020 - 2021

Câu 1. *(2,0 điểm)*
Cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \dfrac{3}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{\sqrt{x}+5}{x-1}$, với $x \geq 0$, $x \neq 1$.

1. Tính giá trị biểu thức A khi $x = 4$.
2. Chứng minh $B = \dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$.
3. Tìm tất cả giá trị của x để biểu thức $P = 2A \cdot B + \sqrt{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc phương trình:*
   Quãng đường từ nhà An đến nhà Bình dài 3 km. Buổi sáng, An đi bộ từ nhà An đến nhà Bình. Buổi chiều cùng ngày, An đi xe đạp từ nhà Bình về nhà An trên cùng một quãng đường đó với vận tốc lớn hơn vận tốc đi bộ của An là 9 km/h. Tính vận tốc đi bộ của An, biết rằng thời gian đi buổi chiều ít hơn thời gian đi buổi sáng là 45 phút. (Giả định rằng An đi bộ với vận tốc không đổi trên toàn bộ quãng đường đó.)
2. Một quả bóng bàn có dạng một hình cầu có bán kính bằng 2 cm. Tính diện tích bề mặt của quả bóng bàn đó (lấy $\pi \approx 3{,}14$).

Câu 3. *(2,5 điểm)*

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + \dfrac{3}{y-1} = 5 \\ 4x - \dfrac{1}{y-1} = 3 \end{cases}$
2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xét đường thẳng $(d)\colon y = mx + 4$ với $m \neq 0$.
   a) Gọi A là giao điểm của đường thẳng (d) với trục Oy. Tìm tọa độ điểm A.
   b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt trục Ox tại điểm B sao cho tam giác OAB là tam giác cân.

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và đường cao BE. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm E đến các đường thẳng AB và BC.

1. Chứng minh tứ giác $BHEK$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $BH \cdot BA = BK \cdot BC$.
3. Gọi F là chân đường vuông góc kẻ từ điểm C đến đường thẳng AB và I là trung điểm của đoạn thẳng EF. Chứng minh ba điểm H, I, K là ba điểm thẳng hàng.

Câu 5. *(0,5 điểm)*
Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{3x-2} = x^2 + 1$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

36 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2021 - 2022

Câu 1. *(2,0 điểm)*
Cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{3x+9}{x-9}$, với $x \geq 0$, $x \neq 9$.

1. Tính giá trị biểu thức A khi $x = 16$.
2. Chứng minh rằng $A + B = \dfrac{3}{\sqrt{x}+3}$.

Câu 2. *(2,5 điểm)*

1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc phương trình:*
Một tổ sản xuất phải làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế trong một số ngày quy định. Thực tế mỗi ngày tổ đó đã làm được nhiều hơn 100 bộ đồ bảo vệ y tế so với với số bộ đồ bảo hộ y tế phải làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế, 8 ngày trước khi hết thời hạn, tổ đã làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm bao nhiêu bộ đồ bảo hộ y tế? (Giả định rằng số bộ đồ bảo hộ y tế tổ đó làm xong trong mỗi ngày là bằng nhau).
2. Một thùng nước có dạng hình trụ có chiều cao 1,6 m và bán kính đáy là 0,5 m. Người ta sơn toàn bộ phía ngoài mặt xung quanh của thùng nước (trừ hai mặt đáy). Tính diện tích bề mặt được sơn của thùng nước (lấy $\pi = 3{,}14$).

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3}{x+1} - 2y = -1 \\ \dfrac{5}{x+1} + 3y = 11 \end{cases}$
2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 2x + m - 2$. Tìm tất cả các giá trị của số thực m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độx_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ đường tròn tâm C, bán kính CA. Từ điểm B, kẻ tiếp tuyến BM với đường tròn $(C; CA)$ (M là tiếp điểm, M và A nằm khác phía đối với đường thẳng BC).

1. Chứng minh rằng bốn điểm A, C, M và B cùng thuộc một đường tròn.
2. Lấy điểm N thuộc đoạn thẳng AB (N khác A và B). Lấy điểm P thuộc tia đối của tia MB sao cho $MP = AN$. Chứng minh rằng tam giác CPN là tam giác cân và đường thẳng AM đi qua trung điểm của đoạn thẳng NP.

Câu 5. *(0,5 điểm)*
Xét các số thực a, b thay đổi và thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2 = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3(a+b)+ab$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

37 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2022 - 2023

Câu 1. *(2,0 điểm)*
Cho hai biểu thức $A = \dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \dfrac{x+4}{x-4} - \dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$, với $x \geq 0$, $x \neq 4$.

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.
2. Chứng minh rằng $B = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$.
3. Tìm số nguyên dương x lớn nhất thỏa mãn $A - B < \dfrac{3}{2}$.

Câu 2. *(2,5 điểm)*

1. *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc phương trình:*
   Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ địa điểm A và đi đến địa điểm B. Do vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là 20 km/h nên ô tô đến B sớm hơn xe máy 30 phút. Biết quãng đường AB dài 60 km, tính vận tốc của mỗi xe. (Giả định rằng vận tốc của mỗi xe là không đổi trên toàn bộ quãng đường AB).
2. Quả bóng đá thường được sử dụng trong các trận đấu dành cho trẻ từ 6 tuổi đến 8 tuổi có dạng hình cầu với bán kính bằng 9,5 cm. Tính diện tích bề mặt của quả bóng đó (lấy $\pi = 3{,}14$).

Câu 3. *(2,5 điểm)*

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + \dfrac{12}{y+2} = 5 \\ 3x - \dfrac{4}{y+2} = 2 \end{cases}$
2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 2x + m^2$.
   a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
   b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độx_1, x_2 sao cho $(x_1+1)(x_2+1) = -3$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi E là một điểm bất kỳ trên tia CA sao cho điểm A nằm giữa hai điểm C và E. Gọi M, H lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng BC và BE.

1. Chứng minh tứ giác rằng $AMBH$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $BC \cdot BM = BH \cdot BE$ và HM là tia phân giác của góc AHB.
3. Lấy điểm N sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AN. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EN và AB. Chứng minh ba điểm H, K, M là ba điểm thẳng hàng.

Câu 5. *(0,5 điểm)*
Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 4$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$.

Chương 2

ĐỀ THI VÀO HỆ CHUYÊN

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

1 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1997 - 1998

Câu 1. Cho biểu thức $P = \dfrac{3\left(x + \sqrt{x} - 3\right)}{x + \sqrt{x} - 2} + \dfrac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 2} - \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$

1. Rút gọn P.
2. Tìm x để $P < \dfrac{15}{4}$.

Câu 2. Một máy bơm dùng để bơm đầy một bể nước có thể tích $60\,\mathrm{m}^3$ với thời gian định trước. Khi đã bơm được $\dfrac{1}{2}$ bể thì mất điện trong 48 phút. Đến lúc có điện trở lại, người ta sử dụng thêm một máy bơm thứ hai có công suất $10\,\mathrm{m}^3/\mathrm{h}$. Cả hai máy bơm cùng hoạt động để bơm đầy bể đúng thời gian dự kiến. Tính công suất của máy bơm thứ nhất và thời gian máy bơm đó hoạt động.

Câu 3. Cho tam giác ABC với ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác trong góc $\widehat{ABC}$ cắt đường tròn (O) tại D, tia phân giác trong góc $\widehat{ACB}$ cắt đường tròn (O) tại E, hai tia phân giác giac này cắt nhau tại F. Gọi I, K theo thứ tự la giao điểm của hai dây DE với các cạnh AB, AC.

1. Chứng minh các tam giác EBF, DAF cân.
2. Chứng minh tứ giác $DKFC$ nội tiếp và FK song song với AB.
3. Tứ giác $AIFK$ là hình gì? Tại sao?
4. Tìm điều kiện của tam giác ABC để tứ giác $AEFD$ là hình thoi, đồng thời diện tích gấp 3 lần diện tích tứ giác $AIFK$.

Câu 4. Tìm những giá trị của x thỏa mãn hệ thức sau:

$$\left(2 - \sqrt{3}\right)^x + \left(7 - 4\sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right)^x = 4\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

2 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1997 - 1998

Câu 1. Cho bốn số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng: $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\le\sqrt{(a+d)(b+c)}$

Câu 2. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2-4x+31}+x^2=4x-1$

Câu 3. Cho tam giác ABC với ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Kẻ các đường cao AA', BB', CC'. Gọi S là diện tích tam giác ABC và S' là diện tích của tam giác $A'B'C'$.

1. Chứng minh rằng OA vuông góc với $B'C'$.

2. Chứng minh $S=\dfrac{1}{2}pR$, trong đó p là nửa chu vi tam giác $A'B'C'$.

3. Chứng minh hệ thức: $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-\dfrac{S'}{S}$.

Câu 4. Xét những số được tạo thành bằng cách viết $2n$ chữ số 0 xen kẽ với $(2n+1)$ chữ số 1 có dạng như sau:

$$10101;\ 1010110101;\ \cdots;1010\cdots10101;\cdots$$

với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng các số trên đều là hợp số.

Câu 5. Hình vuông cạnh n (n là số nguyên lớn hơn 1) được chia thành $n\times n$ ô vuông nhỏ. Trong mỗi ô nhỏ này chỉ gi một trong ba số: 1, 0, -1. Hình vuông như thế được gọi là " bảng số vuông cạnh n"

1. Hãy lập một bảng số vuông 6 cạnh sao cho tổng số nghi trong bảng theo mọi hàng, mọi cột đều khác nhau.

2. Có hay không bảng số vuông cạnh n nào đó mà tổng các số nghi trong bảng theo mọi hàng, mọi cột và theo hai đường chéo đều khác nhau.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

3 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1998 - 1999

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1\right) : \left(1 - \dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}\right)$

1. Rút gọn P.
2. Cho $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 6$, tìm giá trị lớn nhất của P.

Câu 2. Cho phương trình:

$$(x+1)^4 - (m-1)(x+1)^2 - m^2 + m - 1 = 0 \qquad (*)$$

1. Giải phương trình với $m = -1$.
2. Chứng minh rằng phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của tham số m.
3. Tìm các giá trị của m để $|x_1| + |x_2| = 2$.

Câu 3. Cho đường tròn (O, R) có đường kính AB, kẻ tia tiếp tuyến Ax và lấy trên đó một điểm P $(AP > R)$. Từ P kẻ tia PM tiếp xúc với đường tròn tại M.

1. Tứ giác $OBMP$ là hình gì? Tại sao?
2. Cho $AP = R\sqrt{3}$, chứng minh tam giác PAM có trực tâm H nằm trên đường tròn (O, R).
3. Chứng minh rằng khi P di động trên tia Ax $(AP > R)$ thì trực tâm H của tam giác PAM chạy trên một cung tròn cố định.
4. Dựng hình chữ nhật $PAON$, chứng minh B, M, N thẳng hàng.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

4 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1998 - 1999

Câu 1. Cho phương trình: $x^3 - 2mx^2 + \left(m^2+1\right)x - m = 0$, với m là tham số. Tìm các giá trị của m để mọi nghiệm của phương trình đã cho đều thuộc khoảng $(-1;1)$

Câu 2. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} > 2$$

với a, b, c, d cùng dấu.

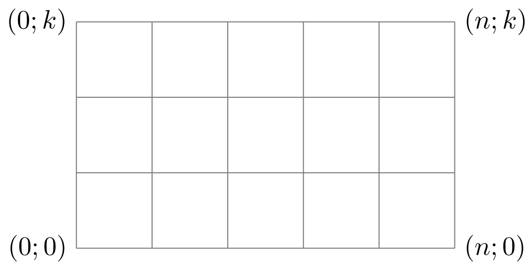
Câu 3. Xét hình thang $ABCD$ vuông tại A và D $(AB < DC)$ có M là trung điểm của AD. Các đỉnh A, C, D cố định, độ dài đáy nhỏ AB thay đổi.

1. Cho $DC = 2DA$. Chứng minh rằng chu vi tam giác MBC nhỏ nhất khi hình thang $ABCD$ ngoại tiếp được một đường tròn.

2. Kẻ tia AA' vuông góc với MB tại A' và tia DD' vuông góc với MC tại D', hai tia này cắt nhau ở K. Tia MK cắt đường thẳng BC tại I, tìm quỹ tích của điểm I.

Câu 4. Từ dãy số $1, 2, 3, \cdots, 1998$ chọn 1000 số tùy ý. Chứng minh rằng trong 1000 số được chọn có ít nhất hai số mà số này là bội số của số kia.

Câu 5. *(Dành cho chuyên Tin)*
Xét một lưới $n \times k$ ô vuông với các nút được ký hiệu theo chỉ số cột và theo chỉ số hàng như hình vẽ.



Một dãy các cạnh ô vuông liên tiếp (theo chiều sang phải hoặc lên trên) nối liền nút $(0, 0)$ với nút (n, k) được gọi là một đường đi của lưới.

1. Tìm tất cả các đường đi của lưới 2×2.

2. Hỏi có bao nhiêu đường đi của lưới $n \times k$ với $n > k$?

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

5 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1999 - 2000

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right) : \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$

1. Rút gọn P.
2. Tìm các giá trị của x để $P < 0$.
3. Với giá trị của x thì biểu thức $\dfrac{1}{P}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2. Cho phương trình: $x^2 - mx + m^2 - 5 = 0$ (m là tham số).

1. Giải phương trình với $m = 1 + \sqrt{2}$.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.
3. Với những giá trị của m mà phương trình có nghiệm, hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong tất cả các nghiệm đó.

Câu 3. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{A}$ tù , đường tròn (O) đường kính AB cắt đường tròn (O') đường kính AC tại giao điểm thứ hai H. Một đường thẳng d quay quanh A cắt đường tròn (O) và đường tròn (O') lần lượt tại M và N sao cho A nằm giữa M và N

1. Chứng minh H thuộc cạnh BC và tứ giác $BCMN$ là hình thang vuông.
2. Chứng minh tỉ số $\dfrac{HM}{HN}$ không đổi.
3. Gọi I là trung điểm của MN, K là trung điểm của BC. Chứng minh bốn điểm A, H, K, I thuộc một đường tròn và I di chuyển trên một cung tròn cố định.
4. Xác định vị trí của đường thẳng (d) để diện tích tam giác HMN lớn nhất.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

6 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 1999 - 2000

Câu 1. Giải phương trình: $x^4 + \sqrt{x^2 + 1999} = 1999$

Câu 2. Tìm tham số m để hai bất phương trình sau không có nghiệm chung:

$$mx + 1 > m \ (1); \qquad x^2 - 9 < 0 \ (2)$$

Câu 3. Cho tam giác ABC có trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp O và bán kính đường tròn nội tiếp là r. Gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ điểm O tới ba cạnh BC, CA, AB.

1. Chứng minh rằng $HA + HB + HC = d_a + d_b + d_c$.
2. Giả sử tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng $HA + HB + HC \geq 6r$.
3. Bất đẳng thức $HA + HB + HC \geq 6r$ còn đúng không khi tam giác ABC có góc $\widehat{A}$ tù, vì sao?

Câu 4. Tìm các chữ số biểu thị bởi các chữ số trong phép nhân sau

$$BIT \cdot 8 = BYTE$$

Biết rằng $T = 2E$ và các chữ cái khác nhau ứng với các chữ số khác nhau.

Câu 5. Người ta kẻ n đường thẳng sao cho không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường nào đồng quy. Các đường thẳng đó chia mặt phẳng thành các miền con. Gọi S_n là số miền con có được từ n đường thẳng đó.

1. Tính S_3, S_4.
2. Chứng minh $S_n = S_{n-1} + n$.
3. Chứng minh $_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

7 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2000 - 2001

Câu 1. *(3,0 điểm)*
Cho biểu thức $P = \dfrac{2x+2}{\sqrt{x}} + \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$

1. Rút gọn P.

2. So sánh P với 5.

3. Với mọi giá trị của x làm P có nghĩa, chứng minh rằng biểu thức $\dfrac{8}{P}$ chỉ nhận đúng một giá trị nguyên.

Câu 2. *(3,0 điểm)*
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d) : y = mx + 1$ và parabol $(P) : y = x^2$.

1. Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) khi $m = 1$.

2. Chứng minh rằng với mọi m, đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định và luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

3. Tìm giá trị của m để diện tích tam giác OAB bằng 2 (đơn vị diện tích).

Câu 3. *(4,0 điểm)*
Cho đoạn thẳng $AB = 2a$, có trung điểm là O. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB kẻ các tia Ax, By vuông góc với AB. Một đường thẳng (d) thay đổi cắt Ax ở M, cắt By ở N sao cho luôn có $AM \cdot BN = a^2$.

1. Chứng minh tam giác AOM đồng dạng với tam giác BNO và góc $\widehat{MON}$ vuông.

2. Gọi H là hình chiếu của O trên MN, chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn tiếp xúc với một nửa đường tròn cố định tại H.

3. Chứng minh rằng tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác MON chạy trên một tia cố định.

4. Tìm vị trí của đường thẳng (d) sao cho chu vi tam giác AHB đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó theo a.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

8 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2000 - 2001

Câu 1. *(2,0 điểm)*
Tìm tất cả các giá trị của x để hàm số $y = \left|x^2 + x + 16\right| + \left|x^2 + x - 6\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất và giá tính giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 2. *(2,0 điểm)*
Tìm k để phương trình: $\left(x^2+2\right)\left[x^2 - 2\left(2k-1\right)x + 5k^2 - 6k + 3\right] = 2x + 1$

Câu 3. *(3,0 điểm)*
Cho góc nhọn xOy và điểm C cố định thuộc tia Ox. Điểm A di chuyển trên tia Ox phía ngoài đoạn OC, điểm B di chuyển trên tia Oy sao cho nó luôn có $CA = OB$. Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

Câu 4. *(2,0 điểm)*
Tìm các số a, b, c biết rằng $\sqrt{abc} = (a+b)\sqrt{c}$

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Một lớp có số học sinh đạt loại giỏi ở mỗi môn học (trong 11 môn) đều vượt quá 50%. Chứng minh rằng có ít nhất 3 học sinh dược xếp loại giỏi từ 2 môn trở lên.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

9 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2001 - 2002

Câu 1. *(2,0 điểm)*
Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} - \dfrac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}\right) : \left(2 - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$

1. Rút gọn P.
2. Tìm x để $\dfrac{1}{P} \leq -\dfrac{5}{2}$.

Câu 2. *(3,0 điểm)*
Cho phương trình: $x - m^2 = 3 - \sqrt{2} - mx\sqrt{2} \quad (1)$

1. Tìm tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất, tính nghiệm duy nhất đó với $m = 1 + \sqrt{2}$.
2. Tìm các giá trị của m để phương trình (1) nhận $x = 5\sqrt{2} - 6$ là nghiệm.
3. Gọi m_1, m_2 là hai nghiệm của phương trình (1) (ẩn m) . Tìm x để m_1, m_2 là số đo của hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{4\sqrt{2}-2}$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*
Cho hai đường tròn (O) bán kính R và đường tròn (O') bán kính $\dfrac{R}{2}$ tiếp xúc ngoài nhau tại A. Trên đường tròn (O) lấy điểm B sao cho $AB = R$ và điểm M trên cung lớn AB. Tia MA cắt đường thẳng MB tại Q và cắt đường tròn (O') tại P.

1. Chứng minh tam giác OAM đồng dạng với tam giác $O'AN$.
2. Chứng minh độ dài đoạn thẳng NQ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.
3. Tứ giác $ABQP$ là hình gì? Vì sao?.
4. Xác định vị trí điểm M để diện tích tứ giác $ABQN$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó theo R.

Câu 4. *(1,0 điểm)*
Ch biểu thức $A = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$. Tìm các cặp số $(x; y)$ để biểu thức A đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

10 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2001 - 2002

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

Khi nào xảy ra dấu đẳng thức?

Tổng quá hóa và chứng minh bài toán với n số dương x_i $\left(i=\overline{1,n};\ n \in \mathbb{N};\ n \geq 1\right)$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Cho phương trình: $m\sqrt{x^6+1} = 3\left(x^4+2\right)$

1. Giải phương trình với $m = 10$.

2. Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm.

Câu 3. *(3,0 điểm)*

Cho đường tròn $(O; R)$, một dây cung cố định $AB = a < 2R$, điểm C di chuyển trên cung lớn AB sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AA', BB', CC' đồng quy tại H. Gọi I và M lần lượt là trung điểm của CH và AB.

1. Chứng minh điểm I chạy trên một cung tròn cố định và đường thẳng MI là trung trực của $A'B'$.

2. Hai đường phân giác trong của góc $\widehat{CAH}$ và $\widehat{CBH}$ cắt nhau tại K. Tính độ dài đoạn IK theo R và a.

Câu 4. *(2,0 điểm)*

Chứng minh rằng với mọi $k \in \mathbb{R}$ ta luôn tìm được $n \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sqrt{n+2001^k}+\sqrt{n} = \left(1+\sqrt{2002}\right)^k$$

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho 5 đường tròn trong đó mỗi một bộ 4 đường tròn đều có 1 điểm chung. Chứng minh rằng 5 đường tròn cùng đi qua một điểm.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

11 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2002 - 2003

Câu 1. *(3,0 điểm)*
Cho biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1} - \dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$

1. Rút gọn P.
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \dfrac{2}{P} + \sqrt{x}$.

Câu 2. *(3,0 điểm)*
Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx - y = 2 & (1) \\ (2-m)\,x + y = m & (2) \end{cases}$

1. Giải hệ phương trình với $m = -\sqrt{3}$.
2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét hai đường thẳng có phương trình là (1) và (2)

   a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng (1) đi qua điểm cố định B và đường thẳng (2) đi qua điểm cố định C.

   b) Tìm m để giao điểm A của hai đường thẳng thỏa mãn điều kiện góc $\widehat{BAC}$ vuông. Tính diện tích tam giác ABC ứng với giá trị đó của m.

Câu 3. *(4,0 điểm)*
Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC và một điểm A trên nửa đường tròn (A khác B và C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A, dựng hai nửa đường tròn đường kính HB và HC, chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F.

1. Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.
2. Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn đường kính HB và HC.
3. Gọi I, K lần lượt là hai điểm đối xứng với H qua AB và AC. Chứng minh ba điểm I, A, K thẳng hàng.
4. Đường thẳng IK cắt tiếp tuyến kẻ từ B của nửa đường tròn (O) tại M, chứng minh MC, AH, EF đồng quy.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

12 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2002 - 2003

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \dfrac{\sqrt{x-2001}}{x+2} + \dfrac{\sqrt{x-2002}}{x}$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Cho đa thức $P_0(x) = x^3 + 22x^2 + 6x + 15$. Với $n \in \mathbb{Z}^*$ ta có $P_n(x) = P_{n-1}(x-n)$. Tính hệ số của x trong $P_{21}(x)$.

Câu 3. *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC, trực tâm H. Lấy điểm K đối xứng với H qua BC.

1. Chứng minh tứ giác $ABKC$ nội tiếp đường tròn (O).
2. Gọi M là một điểm di chuyển trên cung nhỏ AC của đường tròn (O). Chứng minh trung điểm I của KM chạy trên một cung tròn cố định.
3. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng AB và AC. Chứng minh đường thẳng EF đi qua trung điểm của đoạn thẳng HM.

Câu 4. *(1,5 điểm)*

Trong tập $\mathbb{N}^*$ xét các số $P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ và $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$. Hãy tìm các số n $(n \geq 3)$ sao cho P chia hết cho S.

Câu 5. *(1,5 điểm)*

Trên một đường tròn cho sẵn 2000 điểm phân biệt. Người ta gán số 1 vào một điểm, từ điểm đó theo chiều kim đồng hồ ta đếm tiếp 2 điểm nữa và gán số 2 vào điểm thứ 2, lại đếm tiếp 3 điểm và gán số 3, $\cdots$ cứ như vậy đến điểm được gán 2003. Trong 2000 điểm đã cho, có những điểm được gán số nhiều lần và những điểm không được gán số, hãy tìm số tự nhiên nhỏ nhất được gán cùng vị trí với số 2003.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

13 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2003 - 2004

Câu 1. *(3,0 điểm)*

Cho biểu thức $P = \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \dfrac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x} - 1}$

1. Rút gọn P.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.
3. Tìm x để biểu thức $Q = \dfrac{2\sqrt{x}}{P}$ nhận giá trị là số nguyên.

Câu 2. *(3,0 điểm)*

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P) : y = -x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0; -1)$, có hệ số góc k.

1. Viết phương trình đường thẳng (d). Chứng minh với mọi giá trị của k, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.
2. Gọi hoành độ của điểm A và B là x_1 và x_2, chứng minh $|x_1 - x_2| \geq 2$.
3. Chứng minh tam giác OAB vuông.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

Cho đoạn thẳng $AB = 2a$, có trung điểm là O. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB dựng nửa đường tròn (O) đường kính AB và nửa đường tròn (O') đường kính AO. Trên (O') lấy một điểm M (M khác A và O), tia OM cắt (O) tại C, gọi D là giao điểm thứ hai của CA với (O').

1. Chứng minh tam giác ADM cân.
2. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt tia OD tại E, xác định vị trí tương đối của đường thẳng EA đối với (O) và (O').
3. Đường thẳng AM cắt OD tại H, đường tròn ngoại tiếp tam giác COH cắt (O) tại điểm thứ hai là N. Chứng minh ba điểm A, M và N thẳng hàng.
4. Tại vị trí của M sao cho ME song song với AB, hãy tính độ dài đoạn thẳng OM theo a.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

14 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2003 - 2004

Câu 1. *(1,5 điểm)*
Cho hai số tự nhiên a và b, chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2$ chia hết cho 3 thì a và b chia hết cho 3.

Câu 2. *(2,0 điểm)*
Cho phương trình: $\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2 = m$

1. Giải phương trình khi $m = 15$.
2. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 3. *(2,0 điểm)*
Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $x + y = 2003$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = x\left(x^2 + y\right) + y\left(y^2 + x\right)$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho đường tròn (O) với dây BC cố định $(BC < 2R)$ và điểm A trên cung lớn BC (A khác B, C và điểm chính giữa của cung). Gọi H là hình chiếu của A lên BC, E và F lần lượt là hình chiếu của B và C trên đường kính AA'.

1. Chứng minh $HE \perp AC$.
2. Chứng minh hai tam giác HEF và tam giác ABC đồng dạng.
3. Khi A di chuyển, chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF cố định.

Câu 5. *(1,5 điểm)*
Lấy 4 điểm ở miền trong của một tứ giác để cùng với 4 đỉnh ta được 8 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của tứ giác là 1, chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 8 đỉnh đã cho có diện tích không vượt quá $\dfrac{1}{10}$. Tổng quát hóa bài toán cho n đa giác với n điểm nằm ở miền trong của đa giác đó.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

15 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2004 - 2005

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^2$

1. Rút gọn P.
2. Tìm x để $\dfrac{P}{\sqrt{x}} > 2$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Cho phương trình $x^2 - (m-2)\,x - m^2 + 3m - 4 = 0$ (m là tham số).

1. Chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi m.
2. Tìm m để tỉ số giữa hai nghiệm của phương trình có giá trị tuyệt đối bằng 2.
3. Chứng minh tam giác OAB vuông.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Trên mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng (d) có phương trình $2kx + (k-1)\,y = 2$ (k là tham số).

1. Với giá trị nào của k thì đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = x\sqrt{3}$. Khi đó hãy tính góc tạo bởi đường(d) và tia Ox.
2. Tìm k để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Câu 4. *(4,0 điểm)*

Cho góc vuông xOy và hai điểm A, B trên cạnh Ox (A nằm giữa O và B), điểm M bất kỳ trên cạnh Oy. Đường tròn (T) đường kính AB cắt tia MA, MB lần lượt tại điểm thứ hai là C, E. Tia OE cắt đường tròn (T) tại điểm thứ hai là F.

1. Chứng minh bốn điểm O, A, E, M nằm trên một đường tròn, xác định tâm của đường tròn đó.
2. Tứ giác $OCFM$ là hình gì? Tại sao?
3. Chứng minh hệ thức $OE \cdot OF + BE \cdot BM = OB^2$.
4. Xác định vị trí điểm M để tứ giác $OCFM$ là hình bình hành, tìm mối quan hệ giữa OA và AB để tứ giác là hình thoi.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

16 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2004 - 2005

Câu 1. *(2,0 điểm)*
Chứng minh rằng số tự nhiên

$$P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2003 \cdot 2004 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2003} + \frac{1}{2004}\right)$$

chia hết cho 2005.

Câu 2. *(2,0 điểm)*
Cho phương trình: $x + 3\left(m - 3x^2\right)^2 = m$

1. Giải phương trình khi $m = 2$.

2. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Câu 3. *(2,0 điểm)*
Giải bất phương trình sau: $\sqrt[3]{25x\left(2x^2+9\right)} \geq 4x + \dfrac{3}{x}$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, kẻ hai đường cao BE, CF.

1. Biết góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$, tính độ dài EF theo $BC = a$.

2. Trên nửa đường tròn đường kính BC không chứa E, F lấy một điểm M bất kỳ. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CE, EB. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng
$$S = \frac{BC}{MH} + \frac{CE}{MI} + \frac{EB}{MK}$$

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Cho một đa giác có chu vi bằng 1, chứng minh rằng có một hình tròn bán kính $r = \dfrac{1}{4}$ chứa toàn bộ đa giác đó.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

17 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2005 - 2006

Câu 1. *(2,0 điểm)*
Cho biểu thức $P = \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \dfrac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tìm x để $P = \dfrac{9}{2}$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*
Cho bất phương trình $3(m-1)x+1 > 2m+x$ (m là tham số).

1. Giải bất phương trình với $m = 1-2\sqrt{2}$.
2. Tìm m để bất phương trình nhận mọi giá trị $x > 1$ là nghiệm.

Câu 3. *(2,0 điểm)*
Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): 2x-y-a^2=0$ và parabol $(P): y = ax^2$ (a là tham số dương).

1. Tìm a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Chứng minh rằng khi đó A, B nằm về bên phải trục tung.
2. Gọi u, v theo thứ tự là hoành độ của A, B. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \dfrac{4}{u+v} + \dfrac{1}{uv}$

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho đường tròn tâm O có dây cung AB cố định và điểm I là điểm chính giữa cung lớn AB. Lấy điểm M bất kỳ trên cung lớn AB, dựng tia Ax vuông góc với đường thẳng MI tại H và cắt tia BM tại C.

1. Chứng minh tam giác AIB và tam giác AMC là các tam giác cân.
2. Khi điểm M di động trên cung lớn AB, chứng minh rằng điểm C di chuyển trên một cung tròn cố định.
3. Xác định vị trí điểm M để chu vi tam giác AMC đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB < AC$ và trung tuyến AM, góc $\widehat{ACB} = \alpha$ và $\widehat{AMB} = \beta$.
Chứng minh rằng: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin\beta$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

18 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2005 - 2006

Câu 1. *(2,0 điểm)*
Cho $P = (a+b)(b+c)(c+a) - abc$ với a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a+b+c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

Câu 2. *(2,0 điểm)*
Cho hệ phương trình : $\begin{cases} (x+y)^4 + 13 = 6x^2y^2 + m \\ xy\left(x^2+y^2\right) = m \end{cases}$

1. Giải phương trình với $m = -10$.
2. Chứng minh rằng không tồn tại giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất.

Câu 3. *(2,0 điểm)*
Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn hệ thức $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{z} = 6$. Xét hệ thức $P = x + y^2 + z^3$.

1. Chứng minh $P \geq x + 2y + 3z - 3$.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất cuả P.

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác ABC, lấy 3 điểm D, E, F theo thứ tự trên cạnh BC, CA, AB sao cho $AEDF$ là tứ giác nội tiếp. Trên tia AD lấy điểm P (D nằm giữa A và P) sao cho $DA \cdot DP = DB \cdot DC$.

1. Chứng minh tứ giác $ABPC$ nội tiếp.
2. Chứng minh hai tam giác DEF và tam giác PCB đồng dạng với nhau.
3. Gọi S và S_1 lần lượt là diện tích tam giác ABC và tam giác DEF. Chứng minh rằng $\dfrac{S}{S_1} \leq \left(\dfrac{EF}{2AD}\right)^2$

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Cho hình vuông $ABCD$ và 2005 đường thẳng đồng thời thỏa mãn hai điều kiện sau:

1. Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông.
2. Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ số diện tích là 0,5.

   Chứng minh rằng trong 2005 đường thẳng đó có ít nhất 502 đường đồng quy.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

19 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2006 - 2007

Câu 1. *(2,0 điểm)*
Cho phương trình ẩn x:

$$\frac{x^6-1}{x^3}-\left(2a+1\right)\frac{x^2-1}{x}+2a-3=0 \qquad (*)$$

1. Giải phương trình $(*)$ khi $a=1$.
2. Tìm a để phương trình có nhiều hơn hai nghiệm dương phân biệt.

Câu 2. *(2,0 điểm)*
Cho dãy các số tự nhiên $2, 6, 30, 210, \cdots$ được xác định như sau: Số hàng thứ k bằng tích k số nguyên tố đầu tiên $(k=1,2,3,\cdots)$. Biết rằng tồn tại hai số hạng của dãy số có hiệu bằng 30000. Tìm hai số hạng đó.

Câu 3. *(2,0 điểm)*
Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn :

$$\begin{cases}\sqrt{2xy}-z^4\geq 7\\ \sqrt{-x^2y^2+8xy+9}-\sqrt{x^2-4}\geq\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\end{cases}$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho nửa đường tròn đường kính $AB=2R$. Gọi C là điểm tùy ý trên nửa đường tròn, D là hình chiếu vuông góc của C trên AB. Tia phân giác góc $\widehat{ACD}$ cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai là E, tia phân giác góc $\widehat{ABC}$ tại H.

1. Chứng minh $AE \parallel BH$.
2. Tia phân giác giác $\widehat{CAB}$ cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai là F, cắt CE tại I. Tính diện tích tam gaics FID trong trường hợp tam giác đó là đều.
3. Trên đoạn BH lấy điểm K sao cho $HK=HD$. Gọi J là giao điểm của AF và BH. Xác định vị trí của C để tổng khoảng cách từ các điểm I, J, K đến đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Chứng minh rằng trong 2007 số khác nhau tùy ý được lấy từ tập $A=\left\{1,2,3,\cdots,2006^{2007}\right\}$ có ít nhất hai số x, y thỏa mãn: $0<\left|\sqrt[2007]{x}-\sqrt[2007]{y}\right|<1$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

20 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2007 - 2008

Câu 1. *(3,0 điểm)*
Cho phương trình: $x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0 \quad (1)$

1. Tìm nghiệm $(x; y)$ của phương trình (1) thỏa mãn $x^2 + y^2 = 10$.
2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình (1).

Câu 2. *(4,0 điểm)*
Cho điểm A di chuyển trên đường tròn tâm O, đường kính $BC = 2R$ (A không trùng với B và C). Trên tia AB lấy điểm M sao cho B là trung điểm của AM. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC và I là trung điểm của HC.

1. Chứng minh rằng M chuyển động trên một đường tròn cố định.
2. Chứng minh tam giác AHM đồng dạng với tam giác CIA.
3. Chứng minh $MH \perp AI$.
4. MH cắt đường tròn (O) tại E và F, AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai G. Chứng minh rằng tổng bình phương các cạnh của tứ giác $AEGF$ không đổi.

Câu 3. *(1,0 điểm)*
Tìm số nhỏ nhất trong các số nguyên dương là bội của 2007 và có 4 chữ số cuối cùng là 2008.

Câu 4. *(1,0 điểm)*
Cho một lưới hình vuông kích thước 5×5. Người ta điền vào mỗi ô của lưới một trong các số -1; 0; 1. Xét tổng các số được tính theo từng cột, theo từng hàng và theo đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Tính tổng sau theo n (n thuộc tập hợp số tự nhiên khác 0):

$$S = 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-3} + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n$$

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

21 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2008 - 2009

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+19} - \sqrt{y+6} = (m-2008)y + 1 \\ \sqrt{y+19} - \sqrt{x+6} = (m-2008)x + 1 \end{cases}$

1. Giải hệ phương trình khi $m = 2008$.
2. Chứng minh hệ phương trình đã cho có không quá một nghiệm khi $m \geq 2008$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Với mỗi số tự nhiên n, ta đặt $a_n = 3n^2 - 6n + 13$.

1. Chứng minh rằng nếu hai số a_i, a_k không chia hết cho 5 và chia cho 5 dư khác nhau thì $(a_i + a_k)$ chia hết cho 5.
2. Tìm số tự nhiên n lẻ để a_n là số chính phương.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

Cho a là số thay đổi thỏa mãn $-1 \leq a \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của b sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$2\sqrt{1-a^4} + (b-1)\left(\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2}\right) + b - 4 \leq 0$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ hai đường tròn (O_1), (O_2) lần lượt có đường kính AB và AC. Gọi H là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O_2). Đường thẳng d thay đổi đi qua A cắt các đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại các điểm D, E sao cho A nằm giữa D và E.

1. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn DE luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng d thay đổi.
2. Xác định vị trí của đường thẳng d để diện tích tứ giác $BDEC$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo b và c, với $b = AC$, $c = AB$.
3. Đường thẳng đi qua trung điểm đoạn DE và vuông góc với BC cắt BC tại K.

   Chứng minh rằng $KB^2 = BD^2 + KH^2$.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho A là tập hợp gồm 6 phần tử bất kỳ của tập hợp $\{0; 1; 2; \cdots; 14\}$. Chứng minh rằng tồn tại hai tập hợp B_1 và B_2 của tập hợp A (B_1, B_2 khác nhau và khác tập hợp rỗng) sao cho tổng hợp tất cả các phần tử của tập hợp B_1 bằng tổng tất cả các phần tử tập hợp B_2.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

22 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2009 - 2010

Câu 1. *(3,0 điểm)*

1. Tìm các số nguyên dương n để $A = \dfrac{(n-8)^2 - 48}{n+5}$ có giá trị là số nguyên dương.
2. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn đẳng thức $x^2 + y(y^2 + y - 3x) = 0$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2+1)y = 2x^2 \\ (y^2+1)z = 2y^2 \\ (z^2+1)x = 2z^2 \end{cases}$

Câu 3. *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi BD và CE là hai đường cao của tam giác ABC.

1. Chứng minh $AD \cdot AC = AE \cdot AB$.
2. Tia AO cắt BC tại A_1 và cắt cung nhỏ BC tại A_2, tia BO cắt AC tại B_1 v à cắt cung nhỏ AC tại B_2. Tia CO cắt AB tại C_1 và cắt cung nhỏ AB tại C_2. Chứng minh $\dfrac{A_1A_2}{A_1A} + \dfrac{B_1B_2}{B_1B} + \dfrac{C_1C_2}{C_1C} = 1$.
3. Từ A vẽ tia Ax vuông góc với DE. Cho BC cố định, điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC luôn có 3 góc nhọn. Chứng minh tia Ax luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 4. *(1,0 điểm)*

Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là hằng số). Biết rằng $P(1) = 10$, $P(2) = 20$, $P(3) = 30$. Hãy tính giá trị của biểu thức $\dfrac{P(12) + P(-8)}{10} + 25$

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Chứng minh rằng nếu ba điểm A, B, C không có điểm nào nằm ngoài đường tròn (O) sao cho tam giác ABC có 3 góc nhọn thì chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC không lớn hơn chu vi của đường tròn (O)

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

23 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2010 - 2011

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Cho n là số nguyên, chứng minh $A = n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

2. Tìm tất cả các số tự nhiên n để $B = n^4 - 3n^2 + 1$ là số nguyên tố.

Câu 2. *(2,0 điểm)*
Cho phương trình: $\left(m^2 + 2m + 2\right)x^2 - \left(m^2 - 2m + 2\right)x - 1 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho.

1. Tìm tất cả các giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2\left(2x_1x_2 - 1\right)$.

2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x_1 + x_2$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Cho a bất kỳ, chứng minh rằng: $\dfrac{a^{2010} + 2010}{\sqrt{a^{2010} + 2009}} > 2$.

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình: $y^2 - x\left(x - 2\right)\left(x^2 - 2x + 2\right) = 0$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho đường tròn $\left(O; R\right)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Đường tròn đường kính OM cắt đường tròn $\left(O; R\right)$ tại hai điểm E, F.

1. Chứng minh giao điểm I của đoạn thẳng OM với đường tròn $\left(O; R\right)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác MEF.

2. Cho A là một điểm bất kỳ thuộc cung EF chứa điểm M của đường tròn đường kính OM (A khác E và F). Đoạn thẳng OA cắt đoạn thẳng EF tại điểm B. Chứng minh $OA \cdot OB = R^2$.

3. Cho biết $OM = 2R$ và N là điểm bất kỳ thuộc cung EF chứa điểm I của đường tròn $\left(O; R\right)$ (N khác E và F). Gọi d là đường thẳng qua F và vuông góc với đường thẳng EN tại điểm P, d cắt đường tròn đường kính OM tại điểm K (K khác F). Hai đường thẳng FN và KE cắt nhau tại điểm Q.

   Chứng minh rằng: $PK \cdot PK + QN \cdot QK \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}R^2$.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Giải phương trình: $x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 = 0$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

24 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2011 - 2012

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Với $a \neq \pm b$ giải phương trình: $\left(a^4 - b^4\right)x^2 - 2\left(a^3 - b^3\right)x + a^2 - b^2 = 0$.
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - y - xy = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2 - 9n - 3$ chia hết cho $n - 11$.
2. Cho ba số x, y, z không âm thỏa mãn $x + y + z = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 + y^2 + z^2$.

Câu 3. *(3,5 điểm)*
Trên đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ lấy điểm N sao cho $AN = R$ và điểm M thay đổi trên cung nhỏ BN (M không trùng với B, N). Gọi I là giao điểm của AM và BN. Đường thẳng đi qua điểm I và vuông góc với AB cắt tia AN tại điểm C.

1. Chứng minh ba điểm B, C, M thẳng hàng.
2. Xác định vị trí của điểm M để chu vi của tứ giác $ABMN$ là lớn nhất.
3. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MHN thuộc một đường thẳng cố định khi M thay đổi trên cung nhỏ BN.
4. Đường thẳng đi qua M và điểm chính giữa của cung AB không chứa điểm M cắt AB tại điểm D. Chứng minh rằng $\dfrac{MD}{MA} + \dfrac{MD}{MB}$ không đổi khi M thay đổi trên cung nhỏ BN. của đường tròn $(O; R)$.

Câu 4. *(1,5 điểm)*
Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn: $xyz = x^2 - 2z + 2$.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Chứng minh rằng từ 53 số tự nhiên bất kỳ luôn chọn dược 27 số mà tổng của chúng chia hết cho 27.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

25 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2012 - 2013

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Chứng minh rằng nếu n là số nguyên thì $n^5 + n^3 - 6n$ chia hết cho 30.

2. Giả sử n là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $n(n+1)+6$ không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $2n^2+n+8$ không là số chính phương.

Câu 2. *(3,0 điểm)*

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2y - \dfrac{2}{x} + 1 = 0 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 - \dfrac{4}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$

2. Xét các số x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2 = 2012$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 2xy - yz - zx$.

Câu 3. *(3,0 điểm)*
Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định ($BC < 2R$). Điểm A di động trên đường tròn $(O;R)$ sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi AD là đường cao H là trực tâm của tam giác ABC.

1. Đường thẳng chứa phân giác ngoài của góc $\widehat{BHC}$ cắt AB, AC lần lượt tại các điểm M, N. Chứng minh tam giác AMN là tam giác cân.

2. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D trên các đường thẳngBH, CH. Chứng minh $OA \perp EF$.

3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ tại K. Chứng minh đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 4. *(1,0 điểm)*
Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $(x+1)(y+z) = xyz + 2$.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn bán kính 2 cm. Chứng minh trong số 17 điểm A_1, A_2, $\cdots$, A_{17} bất kỳ nằm trong tứ giác $ABCD$ luôn có thể tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa hai điểm đó không lớn hơn 1 cm.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

26 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2013 - 2014

Câu 1. *(2,5 điểm)*

1. Tìm tất cả các số tự nhiên n để $7^{2013} + 3^n$ có chữa số hàng đơn vị 8.
2. Cho a, b là các số tự nhiên lớn hơn 2 và p là số tự nhiên thỏa mãn $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$. Chứng minh p là số chính phương.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x + 6y - 8 = 0$.
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 + xy + 3y^2 - 2y - 4 = 0 \\ 3x^2 + 5y^2 + 4x - 12 = 0 \end{cases}$

Câu 3. *(1,5 điểm)*
Với a, b là các số thực thỏa mãn $a + b + 4ab = 4a^2 + 4b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$A = 20\left(a^3 + b^3\right) - 6\left(a^2 + b^2\right) + 2013$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn $\left(O\right)$ tiếp xúc với BC, AC, AB lần lượt tại M, N, P. Đường thẳng NP cắt BO, CO lần lượt tại E, F.

1. Chứng minh góc $\widehat{OEN}$, $\widehat{OCA}$ bằng nhau hoặc bù nhau.
2. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.
3. Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OEF. Chứng minh O, M, K thẳng hàng.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Trong mặt phẳng cho 6 điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và trong 3 điểm luôn có 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 671. Chứng minh rằng trong 6 điểm đã cho luôn tồn tại 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác có chu vi nhỏ hơn 2013.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

27 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2014 - 2015

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $x\left(5x^3+2\right)+2\left(\sqrt{2x+1}-1\right)=0$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2\left(4y+1\right)-2y=-3 \\ y^2\left(x^2-12y\right)+4y^2=9 \end{cases}$

Câu 2. *(2,5 điểm)*

1. Chứng minh nếu n là số nguyên dương thì $25^n+7^n-4^n\left(3^n+5^n\right)$ chia hết cho 65.

2. Tìm các cặp số nguyên $\left(x,y\right)$ thỏa mãn $x^2y+xy-2x^2-3x+4=0$.

3. Tìm các bộ số tự nhiên $\left(a_1;a_2;a_3;\cdots;a_{2014}\right)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2014}\geq 2014^2 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{2014}^2\geq 2014^3+1 \end{cases}$$

Câu 3. *(1,5 điểm)*
Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q=\frac{x}{x+\sqrt{x+yz}}+\frac{y}{y+\sqrt{y+zx}}+\frac{z}{z+\sqrt{z+xy}}$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$, H là trung điểm BC. M là điểm bất kỳ thuộc đoạn thẳng BH (M khác B). Lấy điểm N thuộc đoạn thẳng CA sao cho $CN=BM$. Gọi I là trung điểm MN.

1. Chứng minh bốn điểm O, M, H, I cùng thuộc một đường tròn.

2. Gọi P là giao điểm của OI và AB. Chứng minh tam giác MNP là tam giác đều.

3. Xác định vị trí của điểm M để tam giác IAB có chi vi nhỏ nhất.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Cho bảng ô vuông kích thước $3\times n$ (3 hàng, n cột, n là số tự nhiên lớn hơn 1) được tạo bởi các ô vuông nhỏ kích thước 1×1. Mỗi ô vuông nhỏ được tô bởi một trong 1 màu xanh hoặc đỏ. Tìm số n bé nhất để với mọi cách tô màu như thế luôn tìm được hình chữ nhật tạo bởi các ô vuông nhỏ hơn sao cho 4 ô vuông nhỏ ở 4 góc của hình chữ nhật cùng màu.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

28 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2015 - 2016

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $\left(2x^2 - 6x + 5\right)\left(2x - 3\right)^2 = 1$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ 2x^3 = x - y \end{cases}$

Câu 2. *(2,5 điểm)*

1. Tìm tất cả các số tự nhiên x, y thỏa mãn $x^2 - 2xy + 3y^2 = x + y$.

2. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho số $\sqrt{\dfrac{4n-2}{n+5}}$ là số hữu tỉ.

3. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $ab = cd$. Chứng minh số $\left(a + b + c + d\right)$ không là số nguyên tố.

Câu 3. *(1,5 điểm)*

Cho x, y, z là các số thực dương, nhỏ hơn 1 thỏa mãn $xyz = \left(1 - x\right)\left(1 - y\right)\left(1 - z\right)$.
Chứng minh trong ba số $x\left(1 - y\right)$, $y\left(1 - z\right)$, $z\left(1 - x\right)$ có ít nhất một số không nhỏ hơn $\dfrac{1}{4}$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho đường tròn $\left(O\right)$ đường kính AB. Gọi I là điểm bất kỳ trên đoạn thẳng AO (I khác A, I khác O). Đường thẳng đi qua I và vuông góc với AB cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại các điểm C và D. Gọi E là điểm trên đường tròn $\left(O\right)$ sao cho D là điểm chính giữa của cung AE. Gọi K là giao điểm của AE và CD.

1. Chứng minh đường thẳng OK đi qua trung điểm của CE.

2. Đường thẳng đi qua I và song song với CE cắt AE, BE lần lượt tại P và Q. Chứng minh tứ giác $DPEQ$ là hình chữ nhật.

3. Tìm vị trí của điểm I trên đoạn AO sao cho $KC = KA + KO$.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho 2015 số nguyên dương phân biệt không vượt quá 3019. Chứng minh trong 2015 số đó tồn tại bố số a, b, c, d sao cho $a + b + c = d$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

29 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2015 - 2016

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $x - \sqrt{x-8} - 3\sqrt{x} + 1 = 0$
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 + 2y^3 = 10x - 10y \end{cases}$

Câu 2. *(2,5 điểm)*

1. Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau.
   Chứng minh $\left(n^4 - 1\right)$ chia hết cho 40.
2. Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x, y thỏa mãn
$$\begin{cases} p - 1 = 2x\left(x+2\right) \\ p^2 - 1 = 2y\left(y+2\right) \end{cases}$$
3. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^3+y^3+z^3 = nx^2y^2z^2$.

Câu 3. *(1,5 điểm)*
Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right) = 1$. Chứng minh
$$ab + bc + ca \leq \frac{3}{4}$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Các đường cao AM, BN, CP của tam giác ABC cùng đi qua điểm H. Gọi Q là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC (Q khác B, Q khác C). Gọi E, F theo thứ tự là điểm đối xứng của Q qua các đường thẳng AB và AC.

1. Chứng minh rằng $MH \cdot MA = MP \cdot MN$.
2. Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng.
3. Gọi J là giao điểm của QE và AB, I là giao điểm của QF và AC. Tìm vị trí của điểm Q trên cung nhỏ BC để $\left(\dfrac{AB}{QJ} + \dfrac{AC}{QI}\right)$ nhỏ nhất.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Chứng minh tồn tại các số nguyên a, b, c sao cho $0 < \left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| < \dfrac{1}{1000}$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

30 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2016 - 2017

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $x^4 - 2x^3 + x - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2y - 4x = 0 \\ 4x^2 - 4xy^2 + y^4 - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $abc \neq 0$. Tính

$$P = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2}$$

2. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $2^x \cdot x^2 = 9y^2 + 6y + 16$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh

$$\frac{2a^2}{a + b^2} + \frac{2b^2}{b + c^2} + \frac{2c^2}{c + a^2} \geq a + b + c$$

2. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số nguyên. Chứng minh $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số chính phương.

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BB', CC' cắt nhau tại điểm H. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại điểm P.

1. Chứng minh hai tam giác BPC' và CPB' đồng dạng.

2. Các đường phân giác của các góc $\widehat{BPC'}$, $\widehat{CPB'}$ lần lượt cắt AB, AC tại các điểm E và F. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF; K là giao điểm của HM và AO'.

   a) Chứng minh tứ giác $PEKF$ nội tiếp.

   b) Chứng minh các tiếp tuyến tại E và F của tròn (O') cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Cho 2017 số hữu tỉ dương được viết trên một đường tròn. Chứng minh tồn tại hai số được viết cạnh nhau trên đường tròn sao cho khi bỏ hai số đó thì 2015 số còn lại không thể chia thành hai nhóm mà tổng các số ở mỗi nhóm bằng nhau.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

31 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2016 - 2017

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $\left(2x-1\right)^2 - 9 = 4\sqrt{x^2 - x}$
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 4y = 3 \\ 4x^2 - 4xy^2 + y^4 - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $a + b + c \neq 0$. Tính
$$P = \frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2}$$
2. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $\left(x; y\right)$ thỏa mãn $x^2 + 2y^2 + 3xy - 2x - 4y - 5 = 0$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $\left(m; n\right)$ sao cho $\left(2m-1\right) \vdots n$ và $\left(2n-1\right) \vdots m$.
2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh
$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho đường tròn $\left(O\right)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường (A, B là các tiếp điểm). Đường thẳng qua M cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại C và D ($MC < MD$) sao cho điểm O nằm trong tam giác BCD. Gọi E là điểm đối xứng của C qua O. Gọi S là giao điểm của EA và BC.

1. Chứng minh hai tam giác OAC và MAS đồng dạng.
2. Đường thẳng SD cắt $\left(O\right)$ tại điểm thứ hai K. Chứng minh tam giác BKC cân.
3. Gọi N là giao điểm của MO và AE. Chứng minh $ND \perp DA$.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Cho 101 số nguyên dương có tổng bằng 300 được viết trên một đường tròn.Chứng minh luôn tồn tại một dãy các số viết liền nhau có tổng bằng 100.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN

32 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2017 - 2018

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $\sqrt{5x - x^2} + 2x^2 - 10x + 6 = 0$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$

Câu 2. *(2,5 điểm)*

1. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x + y - z = 2$ và $3x^2 + 2y^2 - z^2 = 13$.

2. Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$. Chứng minh rằng ab chia hết cho $a + b + c$.

3. Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn $2n + 1$, $3n + 1$ là các số chính phương và $2n + 9$ là số nguyên tố.

Câu 3. *(1,5 điểm)*
Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\left(2a + b + c\right)^2} + \frac{1}{\left(2b + c + a\right)^2} + \frac{1}{\left(2c + a + b\right)^2}$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Gọi D là trung điểm của cạnh BC, E là hình chiếu của điểm A trên cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng AD cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại điểm thứ hai F.

1. Chứng minh $BC^2 = 4 \cdot DA \cdot DF$.

2. Tia DH cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại điểm G. Chứng minh bốn điểm A, G, E và D cùng nằm trên một đường tròn.

3. Đường thẳng FE cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại điểm thứ hai K. Chứng minh đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác GKE.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Viết lên bảng 99 số tự nhiên liên tiếp $1, 2, 3, \cdots, 99$. Ta thực hiện thao tác sau: Xóa ba số a, b, c bất kỳ trên bảng rồi lại viết lên bảng số $\left(abc + ab + bc + ca + a + b + c\right)$. Tiếp tục thực hiện thao tác trên cho đến khi trên bảng còn lại đúng một số. Tìm số còn lại đó.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN TOÁN - TIN

33 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2017 - 2018

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $\sqrt{6x - x^2} + 2x^2 - 12x + 15 = 0$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2 = y + \dfrac{3}{y} \\ 4y^2 = x + \dfrac{3}{x} \end{cases}$

Câu 2. *(2,5 điểm)*

1. Cho p làm một số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $2017 - p^3$ chia hết cho 24.

2. Cho a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng $a + b + 2\sqrt{ab + c^2}$ không phải là số nguyên tố.

Câu 3. *(1,5 điểm)*
Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh

$$\frac{x}{3 - yz} + \frac{y}{3 - zx} + \frac{z}{3 - xy} \leq \frac{3}{2}$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, D là hình chiếu của điểm I trên đường thẳng BC và G là giao điểm thứ hai của đường thẳng AD với đường tròn (O). Gọi F là điểm chính giữa cung lớn BC của đường tròn (O). Đường thẳng FG cắt đường thẳng ID tại điểm H.

1. Chứng minh tứ giác $IBHC$ là tứ giác nội tiếp.

2. Gọi J là giao điểm thứ hai của đường thẳng AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Chứng minh $BH = CJ$.

3. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng FH với đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Chứng minh đường thẳng NJ đi qua trung điểm của cạnh BC.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Xét tập hợp S gồm các số nguyên dương có tính chất: với hai phần tử phân biệt bất kì x, y thuộc S, ta luôn có $30|x - y| \geq xy$. Hỏi tập hợp S có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN TIN

34 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2018 - 2019

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $x^2 + 2x + 7 = (x+3)\sqrt{x^2+5}$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)\left(x^2-y^2\right) = 1 \\ (x+y)\left(x^2+y^2\right) = 1 \end{cases}$

Câu 2. *(2,5 điểm)*

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $4x^2 + 8xy + 3y^2 + 2x + y + 2 = 0$.

2. Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $3a^2 + a = 4b^2 - b$. Chứng minh rằng $a + b$ là một số chính phương.

Câu 3. *(1,5 điểm)*

1. Với x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $xyz = 1$, chứng minh

$$\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} = 1$$

2. Với x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $xyz \geq 1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{xy+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{yz+y+1}} + \frac{1}{\sqrt{zx+z+1}}.$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác nhọn ABC cân tại A, đường cao BE và nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Đường thẳng BE cắt các đường thẳng AD và AO lần lượt tại các điểm I và H.

1. Chứng minh $BH \cdot BI = 2R^2$.

2. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Lấy điểm N thuộc tia đối của tia OA sao cho $ON = \dfrac{R}{2}$. Chứng minh tứ giác $AMNC$ là tứ giác nội tiếp.

3. Gọi K là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh đường thẳng KE đi qua trung điểm của đoạn thẳng OI.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Trên một đường tròn cho 2018 điểm phân biệt, An và Bình cùng chơi trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi, một bạn sẽ nối 2 điểm trong 2018 điểm đã cho để được một dây cung sao cho dây cung vừa được vẽ không có điểm chung với bất kỳ một dây cùng nào vẽ trước đó. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người đi trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi để An luôn là người thắng cuộc.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN TOÁN - TIN

35 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2018 - 2019

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $x^2+2x+7=(x+3)\sqrt{x^2+5}$
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2-2xy=8x^2-6x+1 \\ y^2=x^3+8x^2-x+1 \end{cases}$

Câu 2. *(2,5 điểm)*

1. Cho p, q là hai số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^4+2019q^4$ chia hết cho 20.
2. Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a<b\le c<d$; $ad=bc$ và $\sqrt{d}-\sqrt{a}\le 1$.

a) Chứng minh $a+d>b+c$.

b) Chứng minh a là một số chính phương.

Câu 3. *(1,5 điểm)*

1. Với x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $xyz=1$, chứng minh
$$\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}=1$$
2. Với x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$P=\frac{1}{\sqrt{2x^2+y^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{2y^2+z^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{2z^2+x^2+3}}.$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tứ giác $ABCD$ (không có hai cạnh nào song song) nội tiếp đường tròn (O). Các tia BA và CD cắt nhau tại điểm F. Gọi E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Vẽ hình bình hành $AEDK$.

1. Chứng minh tam giác FKD đồng dạng với tam giác FEB.
2. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AD, BC. Chứng minh đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF.
3. Chứng minh đường thẳng EF tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp của tam giác EMN.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Cho tập hợp $S=\{x\in\mathbb{Z} | 1\le x\le 50\}$. Xét A là một tập hợp con bất kì của tập hợp S và có tính chất: Không có ba phần tử nào của tập hợp A là số đo độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

1. Tìm một tập hợp A có đúng 40 phần tử và thỏa mãn điều kiện đề bài.
2. Có hay không một tập hợp A có đúng 41 phần tử và thỏa mãn điều kiện đề bài? Hãy giải thích câu trả lời.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN TIN

36 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2019 - 2020

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $x^2 - 1 = \sqrt{x+1}$
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0 \\ x^2 + x + 1 = y^2 \end{cases}$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. Cho biểu thức $P = ab(a+b) + 2$ với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức P chia hết cho 3 thì P chia hết cho 9.
2. Tìm tất cả số tự nhiên x để giá trị của biểu thức $P = x^3 + 3x^2 + x + 3$ là lũy thừa của một số nguyên tố.

Câu 3. *(2,0 điểm)*
Cho các số dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$.

1. Chứng minh $\dfrac{1}{a+2} + \dfrac{1}{b+2} + \dfrac{1}{c+2} = 1$.
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)+4}} + \frac{1}{\sqrt{2(b^2+c^2)+4}} + \frac{1}{\sqrt{2(c^2+a^2)+4}}$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Đường tròn (O) cắt đường tròn đường kính AH tại điểm thứ hai F (F khác A).

1. Chứng minh tam giác BEF đồng dạng với tam giác CDF.
2. Gọi N là điểm chính giữa của cung nhỏ BC của đường tròn (O). Đường thẳng FN cắt cạnh BC tại điểm K. Chứng minh tia HK là tia phân giác của góc BHC.
3. Hai tia phân giác của góc ABH và góc ACH cắt nhau tại điểm I. Gọi P là giao điểm của đoạn thẳng ON và cạnh BC. Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng AH. Chứng minh P,I, Q là ba điểm thẳng hàng.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Trên bàn có hai túi kẹo: túi thứ nhất có 22 viên kẹo, túi thứ hai có 29 viên kẹo. An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: mỗi lượt chơi một bạn sẽ chọn một túi kẹo và lấy ít nhất 1 viên kẹo trong túi kẹo đó. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An luôn là người thắng cuộc.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN TOÁN

37 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2019 - 2020

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x^2+5x}\right)=5$
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+7=4y^2+4y \\ x^2+3xy+2y^2+x+y=0 \end{cases}$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. Cho biểu thức $P=abc\,(a-1)\,(b+4)\,(c+6)$ với a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a+b+c=2019$. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức P chia hết cho 6.
2. Tìm tất cả số tự nhiên n để giá trị của biểu thức $Q=\sqrt{n+2}+\sqrt{n+\sqrt{n+2}}$ là số nguyên.

Câu 3. *(2,0 điểm)* Cho biểu thức $K=ab+4ac-4bc$, với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+2c=1$.

1. Chứng minh $K\geq -\dfrac{1}{2}$.
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức K.

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB<AC$), nội tiếp đường tròn (O). Gọi điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tia AI cắt đoạn thẳng BC tại điểm J, cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M (M khác A).

1. Chứng minh $MI^2=MJ\cdot MA$.
2. Kẻ đường kính MN của đường tròn (O). Đường thẳng AN cắt các tia phân giác trong của góc ABC và góc ACB lần lượt tại điểm P và Q. Chứng minh N là trung điểm của đoạn PQ.
3. Lấy điểm E bất kỳ thuộc cung nhỏ MC của đường tròn (O) (E khác M). Gọi F là điểm đối xứng với điểm I qua điểm E. Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng PC và QB. Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, R, F cùng thuộc một đường tròn.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ.

1. Chứng minh trong mặt phẳng đó tồn tại hai điểm được tô bởi cùng một màu và có khoảng cách bằng d.
2. Gọi tam giác có ba đỉnh được tô bởi cùng một màu là tam giác *đơn sắc*. Chứng minh trong mặt phẳng đó tồn tại hai tam giác *đơn sắc* là hai tam giác vuông và đồng dạng với nhau theo tỉ số $k=\dfrac{1}{2019}$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN TIN

38 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2020 - 2021

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $(x+2)\sqrt{x^2+1} = x^2+2x+1$

2. Chứng minh
$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{2021\sqrt{2020}+2020\sqrt{2021}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2021}}.$$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. Chứng minh với mọi số nguyên dương n, số $A = 59^n - 17^n - 9^n + 2^n$ chia hết cho 35.

2. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện $x^2y - 3y - 4x - 1 = 0$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời các điều kiện $a^2+b^2+c^2 = 38$, $a+b = 8$ và $b+c \geq 7$.

2. Với a, b, c là các số thực không âm và luôn thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 = 2ab+2bc+2ca$, chứng minh
$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{2abc}.$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và ba đường cao AD, BE, CF cùng đi qua điểm H. Gọi (S) là đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.

1. Chứng minh đường tròn (S) đi qua trung điểm của đoạn thẳng AH.

2. Gọi M và N lần lượt là giao điểm của đường tròn (S) với các đoạn thẳng BH và CH. Tiếp tuyến tại D của đường tròn (S) cắt đường thẳng MN tại điểm T. Chứng minh HT song song với đường thẳng EF.

3. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng BH và DF, Q là giao điểm của hai đường thẳng CH và DE. Chứng minh ba điểm T,P, Q là ba điểm thẳng hàng.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Trên bàn có 6 hộp kẹo, mỗi hộp có 5 viên kẹo. An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: mỗi lượt chơi, An sẽ chọn một hộp tùy ý và lấy ít nhất 1 viên kẹo ở hộp đó; còn Bình thì chọn một hộp và các hộp đã chọn, mỗi hộp lấy đúng 1 viên kẹo. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi để Bình là người thắng cuộc.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN TOÁN

39 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2020 - 2021

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $x^2 + 3x + 5 = (x+3)\sqrt{x^2+5}$.

2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b - 2c = 0$ và $2ab - bc - ca = 0$. Chứng minh $a = b = c$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. Chứng minh với mọi số nguyên dương n, số $A = 11^n + 7^n - 2^n - 1$ chia hết cho 15.

2. Cho hai số nguyên dương m và n thỏa mãn $\sqrt{11} - \dfrac{m}{n} > 0$. Chứng minh
$$\sqrt{11} - \frac{m}{n} \geq \frac{\left(\sqrt{11}-3\right)}{mn}.$$

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn $P(1) = 3$ và $P(3) = 7$. Tìm đa thức dư tỏng phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $x^2 - 4x + 3$.

2. Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c + abc = 4$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + bc + ca$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ điểm I đến các đường thẳng BC, CA, AB. Đường thẳng AD cắt đường tròn (I) tại hai điểm phân biệt D và M. Đường thẳng qua K song song với đường thẳng AD cắt đường thẳng BC tại N.

1. Chứng minh tam giác MFD đồng dạng với tam giác BNK.

2. Gọi P là giao điểm của BI và FD. Chứng minh góc BMF bằng góc DMP.

3. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC đi qua trung điểm của đoạn thẳng KN.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Cho một bảng ô vuông kích thước 6×7 (6 hàng; 7 cột) được tạo bởi các ô vuông kích thước 1×1. Mỗi ô vuông kích thước 1×1 được tô bởi một trong hai màu đen hoặc trắng sao cho trong mọi bảng ô vuông kích thước 2×3 hoặc 3×2, có ít nhất hai ô vuông kích thước 1×1 được tô màu đen có chung cạnh. Gọi m là số ô vuông kích thước 1×1 được tô màu đen trong bảng.

1. Chỉ ra cách tô sao cho $m = 20$.

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của m.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN TIN

40 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2020 - 2021

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $(x+2)\sqrt{x^2+1} = x^2+2x+1$
2. Chứng minh
$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{2021\sqrt{2020}+2020\sqrt{2021}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2021}}.$$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. Chứng minh với mọi số nguyên dương n, số $A = 59^n - 17^n - 9^n + 2^n$ chia hết cho 35.
2. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện $x^2y - 3y - 4x - 1 = 0$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời các điều kiện $a^2+b^2+c^2 = 38$, $a+b = 8$ và $b+c \geq 7$.
2. Với a, b, c là các số thực không âm và luôn thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 = 2ab+2bc+2ca$, chứng minh
$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{2abc}.$$

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và ba đường cao AD, BE, CF cùng đi qua điểm H. Gọi (S) là đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.

1. Chứng minh đường tròn (S) đi qua trung điểm của đoạn thẳng AH.
2. Gọi M và N lần lượt là giao điểm của đường tròn (S) với các đoạn thẳng BH và CH. Tiếp tuyến tại D của đường tròn (S) cắt đường thẳng MN tại điểm T. Chứng minh HT song song với đường thẳng EF.
3. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng BH và DF, Q là giao điểm của hai đường thẳng CH và DE. Chứng minh ba điểm T,P, Q là ba điểm thẳng hàng.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Trên bàn có 6 hộp kẹo, mỗi hộp có 5 viên kẹo. An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: mỗi lượt chơi, An sẽ chọn một hộp tùy ý và lấy ít nhất 1 viên kẹo ở hộp đó; còn Bình thì chọn một hộp và các hộp đã chọn, mỗi hộp lấy đúng 1 viên kẹo. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi để Bình là người thắng cuộc.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN TIN

41 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2021 - 2022

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$.
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+2=3y \\ y^3+2=3x. \end{cases}$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. Chứng minh với mỗi số nguyên n, số $n^2+3n+16$ không chia hết cho 25.
2. Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn $x^2-xy-2y^2+x+y-5=0$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Cho a, b và c là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh
$$\frac{(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)}+\frac{(b+c)(c+a)}{(b-c)(c-a)}+\frac{(c+a)(a+b)}{(c-a)(a-b)}=-1.$$
2. Cho biểu thức $P=\dfrac{a}{\sqrt{1+2bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{1+2ca}}+\dfrac{c}{\sqrt{1+2ab}}$ với a, b và c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P.

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB<AC$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M (M khác A). Gọi D, E và F lần lượt là các hình chiếu của điểm I trên các đường thẳng BC, CA và AB.

1. Chứng minh tam giác MBI là tam giác cân.
2. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai P (P khác A). Chứng minh P, M và D là ba điểm thẳng hàng.
3. Gọi H là giao điểm của đường thẳng IP và đường thẳng EF. Chứng minh HD song song với AM.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Trên bàn có n viên kẹo. Hia bạn An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: Hai bạn luân phiên lấy kẹo trên bàn, mỗi lần chỉ được lấy 1, 2, 3, 4 hoặc 5 viên kẹo và phải lấy số viên kẹo khác với số viên kẹo của bạn còn lại vừa lấy ngay trước đó. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước,

1. Với $n=7$, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của Bình khiến An là người thua cuộc.
2. Với $n=22$, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An khiến Bình là người thua cuộc.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN TOÁN

42 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2021 - 2022

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $x^2 + x + 2 - 2\sqrt{x+1} = 0$.
2. Cho ba số thực a, b và c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh
$$\frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} = 0$$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + 5xy + 6y^2 + x + 2y - 2 = 0$.
2. Chứng minh với mỗi số nguyên n, số $n^2 + n + 16$ không chia hết cho 49.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Cho số thực x khác 0 thỏa mãn $x + \dfrac{2}{x}$ và x^2 đều là số hữu tỉ. Chứng minh x là số hữu tỉ.
2. Cho các số thực không âm a, b và c thỏa mãn $a + b + c = 5$. Chứng minh $2a + 2ab + abc \leq 18$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), với góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $AB < AC$. Các đường thẳng BO, CO lần lượt cắt các đoạn thẳng AC, AB tại M, N. Gọi F là điểm chính giữa của cung BC lớn.

1. Chứng minh năm điểm A, N, O, M và F cùng thuộc một đường tròn.
2. Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm thứ hai của hai tia FN, FM với đường tròn (O). Gọi J là giao điểm của đường thẳng BC và đường thẳng PQ. Chứng minh tia AJ là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.
3. Gọi K là giao điểm của đường thẳng OJ và đường thẳng CF. Chứng minh AB vuông góc với AK.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Cho A là một tập hợp con có 100 phần tử của tập hợp $\{1, 2, 3, \ldots, 178\}$.

1. Chứng minh A chứa hai số tự nhiên liên tiếp.
2. Chứng minh với mọi số tự nhiên n thuộc tập hợp $\{2, 3, 4, \ldots, 22\}$, tồn tại hai phần tử của A có hiệu bằng n.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN TIN

43 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2022 - 2023

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $x^2 - 2x + 2 = \sqrt{(x^2+4)(x+1)}$.

2. Với a, b và c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 3$, tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2(b+c)+3} + \frac{1}{b^2(c+a)+3} + \frac{1}{c^2(a+b)+3}$$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. Với p là một số nguyên tố lớn hơn 3, chứng minh số $A = 5^p + p^2$ chia hết cho 6.

2. Tìm tất cả các số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^3 - x^2y + 2x = 5x^2 - 2y - 1$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Với a, b và c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 2$, chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 - 3(a+b-c) \geq -\frac{9}{4}$$

2. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b và c sao cho các phương trình $x^2 - 2ax + b = 0$, $x^2 - 2bx + c = 0$ và $x^2 - 2cx + a = 0$ đều có nghiệm là các số nguyên dương.

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác ABC với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cùng đi qua điểm H. Gọi I và K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EF và BC.

1. Chứng minh $\dfrac{AI}{AK} = \dfrac{HI}{HK}$.

2. Chứng minh đường thẳng AH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IHK.

3. Gọi P là chân đường vuông góc kẻ từ điểm H đến đường thẳng EF. Chứng minh đường thẳng DP song song với đường thẳng AI.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Trên bảng có hai số tự nhiên m và n. An và Bình chơi một trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi, một bạn chọn một trong hai số trên bảng để xóa và viết lên bảng một số mới là hiệu không âm của số vừa xóa với một ước số tự nhiên bất kỳ của số vừa xóa. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc, người còn lại là người thắng cuộc. Biết rằng An là người thực hiện lượt chơi đầu tiên:

1. Với $m = 2022$ và $n = 2023$, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.

2. Với $m = 2022$ và $n = 1981$, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 - HỆ CHUYÊN TOÁN

44 Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, năm học 2022 - 2023

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình $x^2 - 4x + 2\sqrt{2x-1} + 1 = 0$.
2. Cho các số thực a, b và c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tính giá trị biểu thức
$$P = \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} - \frac{2}{a+b+c-abc}.$$

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. Chứng minh nếu n là số tự nhiên lẻ thì $3^{2n+1} - 7$ chia hết cho 20.
2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) sao cho $y\left(x^2 + x + 1\right) = (x+1)\left(y^2 - 1\right)$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1. Tìm hai số nguyên dương m và n sao cho $\dfrac{m^3}{m+n}$ và $\dfrac{n^3}{m+n}$ đều là các số nguyên tố.
2. Với a, b và c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = ab + 2bc + 3ca - 3abc$.

Câu 4. *(3,0 điểm)*
Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với ba cạnh BC, CA và AB lần lượt tại ba điểm D, E và F.

1. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AI và DF. Chứng minh đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng AI.
2. Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AI và DE. Gọi K làm trung điểm của đoạn BC. Chứng minh tam giác KMN là tam giác cân.
3. Các tiếp tuyến tại M và N của đường tròn $(K; KM)$ cắt nhau tại điểm S. Chứng minh đường thẳng AS song song với đường thẳng ID.

Câu 5. *(1,0 điểm)*
Cho tập hợp A gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90. Gọi B là tập hợp gồm các số có dạng $x + y$ với $x \in A$ và $y \in A$ (x, y không nhất thiết phân biệt).

1. Chứng minh $68 \in B$.
2. Chứng minh B chứa 91 số nguyên liên tiếp.